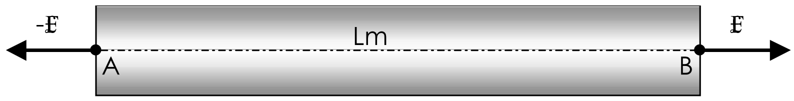
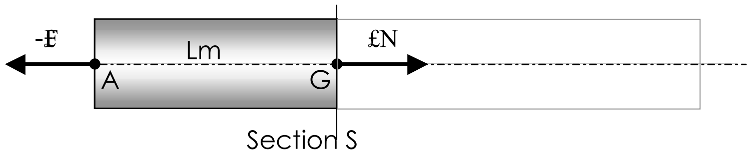
Les Sollicitations simples

1. Traction

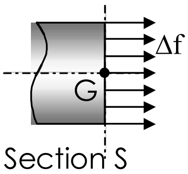
1.1. Définitions

Une poutre est sollicitée en traction lorsque le torseur de cohésion s'écrit: $\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$.





1.2. Contrainte normale



Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de traction Δf parallèle à la ligne moyenne.
Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{S}}$$

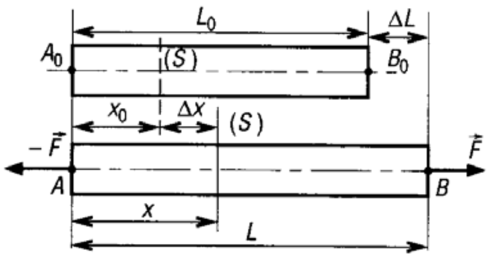
σ : contrainte normale en Mpa ou en N/mm^2
N : effort normal en N
S : aire de la section droite en mm^2

1.3. Condition de résistance

Soient :
- ☞ R_e la résistance élastique du matériau (en Mpa) ;
- ☞ s un coefficient de sécurité (s>1);
- ☞ R_{pe} la résistance pratique à l'extension, avec $R_{pe} = \frac{R_e}{s}$;

Alors, la condition de résistance s'écrit : $\boxed{\sigma \leq R_{pe}}$

1.4. Déformation



Soients :

L_0 : longueur initiale de la poutre (en mm)
L : longueur de la poutre après déformation (en mm)
$\Delta L = L - L_0$: Allongement de la poutre (en mm)
@ : Allongement relatif de la poutre (sans unité)

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}}$$

En déformation élastique, la contrainte σ varie linéairement en fonction de l'allongement relatif @.

<u>Loi de Hooke</u> : $\boxed{\sigma = E.@}$

σ : contrainte normale en N/mm^2
E : module d'élasticité longitudinale (module d'Young) en Mpa
@ : allongement relatif (pas d'unité)

1.5. *Phénomène de concentration de contrainte*

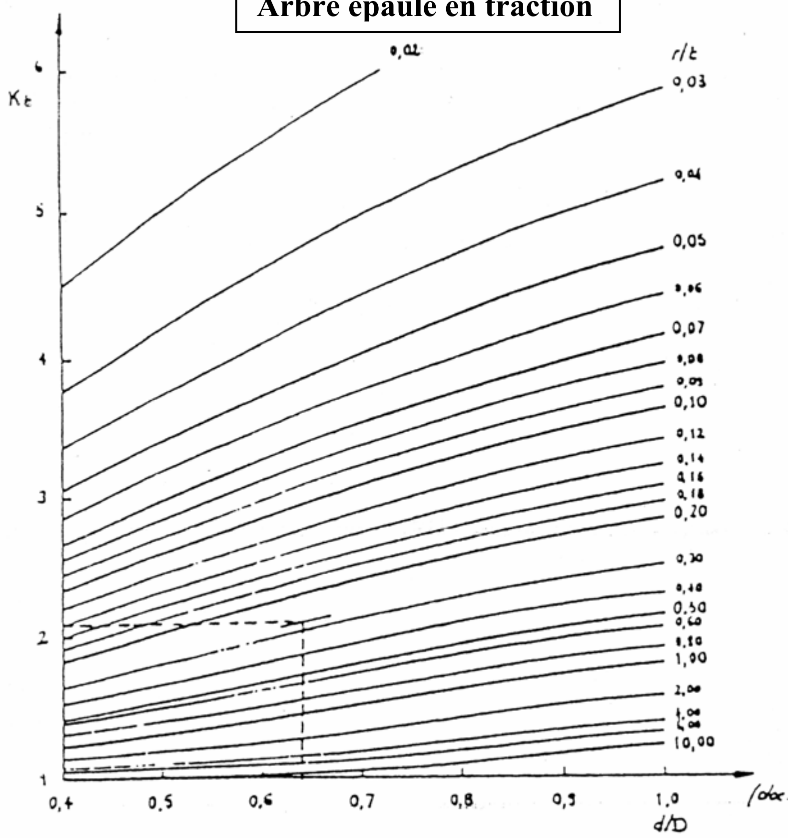
Lorsqu'une poutre possède une variation brusque de sa section, les hypothèses de la Résistance des matériaux ne sont plus vérifiées. En traction, la répartition de la **contrainte normale σ n'est plus uniforme**. L'essai de traction ci-dessous, a été réalisé sur une poutre de section rectangulaire, percée d'un trou cylindrique :

Loin du perçage, la contrainte normale vaut 4,15 10^{-3} MPa. Par contre, à proximité de ce même perçage (zone rouge) la contrainte normale grimpe à 9,138 10^{-3} MPa, soit une peu plus du double de la valeur précédente.

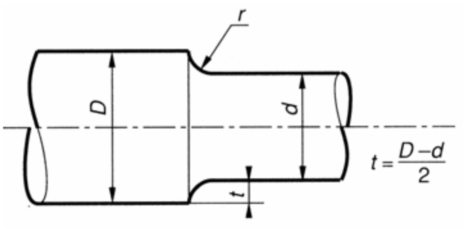
Pour tenir compte de ce phénomène, nous introduisons la notion de **Coefficient de concentration de contrainte** : K_t .

$$\sigma_{no\min ale} = \frac{N}{S} \quad d'où \quad \sigma_{\max i} = K_t . \sigma_{no\min ale}$$
$$Condition \ de \ résistance : \ \sigma_{\max i} < R_{pe}$$

Arbre épaulé en traction



Exemple : D= 100, d=64, r=5
N = 5000 daN



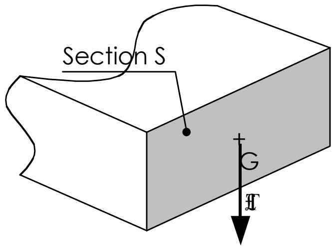
$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{D} = \frac{64}{100} = 0,64 \\ \frac{r}{t} = \frac{2.r}{D-d} = \frac{10}{100-64} = 0,278 \end{array}\right\} K_t = 2,1$$

$$\sigma_{no\min ale} = \frac{4 \times 5000}{\pi \times 64^2} = 1,55 \quad daN/mm^2$$

$$\sigma_{\max i} = K_t \times \sigma_{no\min ale} = 2,1 \times 1,55 = 3,26 \quad daN/mm^2$$

2. Cisaillement

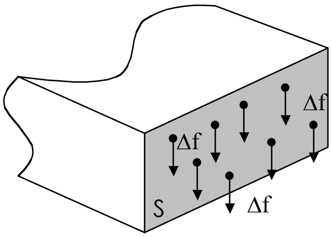
2.1. Définitions



Une poutre est sollicitée en cisaillement lorsque le torseur de cohésion s'écrit : $\{\tau_{Coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$.

Dans nos problèmes, nous aurons souvent soit $T_y=0$ ou soit $T_z=0$.

2.2. Contrainte de cisaillement



Chaque élément de surface ΔS supporte un effort de cisaillement Δf contenu dans le plan (S).

Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite. D'où :

$$\boxed{\tau = \frac{\|\vec{T}\|}{S}}$$

© : contrainte tangentielle en Mpa ou N/mm^2
$\vec{T}$: effort tranchant en N
S : aire de la section droite cisaillée en mm^2

2.3. Condition de résistance

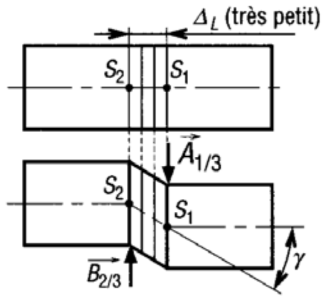
Soient :
- ☞ R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa) ;
- ☞ s un coefficient de sécurité ;
- ☞ $©_{adm}$ = R_{pg} la résistance pratique au cisaillement, avec $\tau_{adm} = R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$;

Alors, la condition de résistance s'écrit :

$$\boxed{© \leq ©_{adm}}$$

2.4. Déformation

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement © varie linéairement en fonction de l'angle de glissement γ.



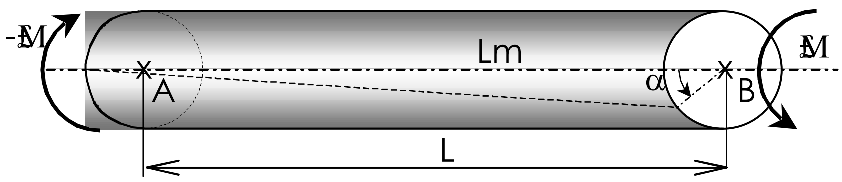
$$\boxed{© = G.\ \gamma}$$

© : contrainte tangentielle en N/mm^2
G : module d'élasticité transversal en Mpa
γ : angle de glissement en radians

3. Torsion simple

3.1. *Définitions*

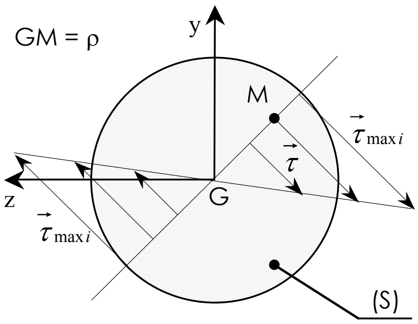
Une poutre est sollicitée en torsion simple lorsque le torseur de cohésion s'écrit : $\{\tau_{Coh}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_G$.



Soit α l'angle de rotation entre les deux extrémités de la poutre.

3.2. *Contrainte tangentielle de torsion*

Soit $\theta = \frac{\alpha}{L}$: angle *unitaire* de torsion en rad/mm.



$\boxed{© = G.\theta.\rho}$

© : contrainte tangentielle en N/mm^2
G : module d'élasticité transversal en Mpa
θ : angle unitaire de torsion en rad/mm
ρ : rayon GM en mm

$\boxed{M_t = G.\theta.I_0}$

M_t : Moment de torsion en N.mm
G : module d'élasticité transversal en Mpa
θ : angle unitaire de torsion en rad/mm
I_0 : moment quadratique par rapport au point G en mm^4

d'où : $\boxed{\tau = \frac{M_t}{\frac{I_0}{\rho}}}$

3.3. *Condition de résistance*

Soient :
- ☞ R_{eg} la résistance élastique au cisaillement du matériau (en Mpa) ;
- ☞ s un coefficient de sécurité ;
- ☞ R_{pg} la résistance pratique au cisaillement, avec $R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$;

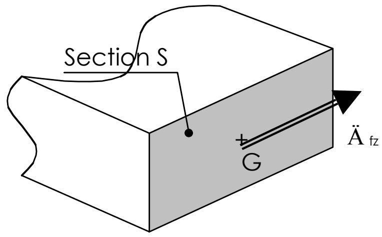
$\boxed{©_{max} \leq R_{pg}}$

3.4. *Déformation*

L'angle unitaire de torsion θ est caractéristique de la déformation. Sa méthode de calcul dépend de la géométrie de la section (forme, section ouverte ou fermée, etc…). Ce calcul ne sera pas abordé dans ce cours.

4. Flexion pure

4.1. Définitions



Une poutre est sollicitée en flexion pure lorsque le torseur de cohésion s'écrit : $\{\tau_{Coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}$.

Dans nos problèmes nous aurons souvent M_{fy} ou M_{fz} nul.

4.2. Contraintes normales

$$\boxed{\sigma = \frac{M_{fz}}{\frac{I_{Gz}}{y}}}$$

σ : contrainte normale en Mpa
y : ordonnée du barycentre de la section en mm
$Ä_{fz}$: Moment de flexion en N.mm
I_{Gz} : moment quadratique de la section en mm^4

4.3. Condition de résistance

Soient :
- ☞ R_e la résistance élastique à l'extension du matériau (en Mpa) ;
- ☞ s un coefficient de sécurité ;
- ☞ R_{pe} la résistance pratique à l'extension, avec $R_{pe} = \frac{R_e}{s}$;

$$\boxed{\sigma_{max} \leq R_{pe}}$$

4.4. Déformation

L'étude des déformations dans le cas de la flexion, ne sera pas abordée dans ce cours.