



Régulation automatique

Chapitre 4: Régulateur PID

Filière électronique

Filière microtechnique

Michel ETIQUE

Michel.Etique@eivd.ch

Haute Ecole d'Ingénieurs et de Gestion du canton de Vaud (HEIG-Vd)

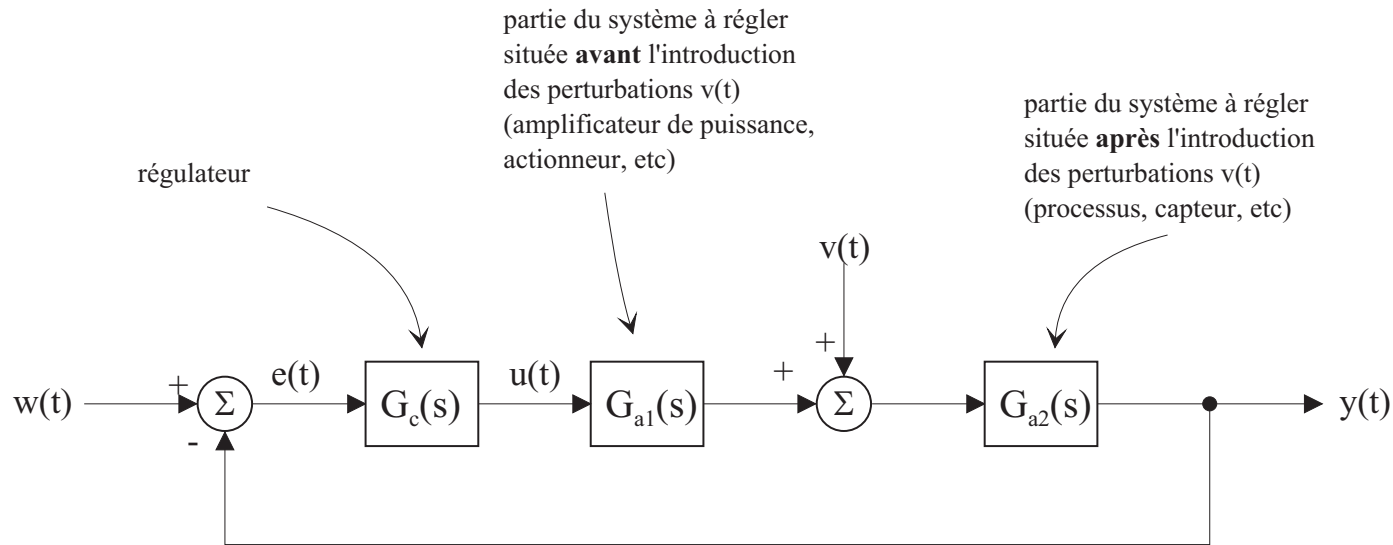
Département d'électricité et d'informatique

institut d'Automatisation industrielle (iAi)



Fonctions de transfert d'un système asservi

Schéma fonctionnel universel

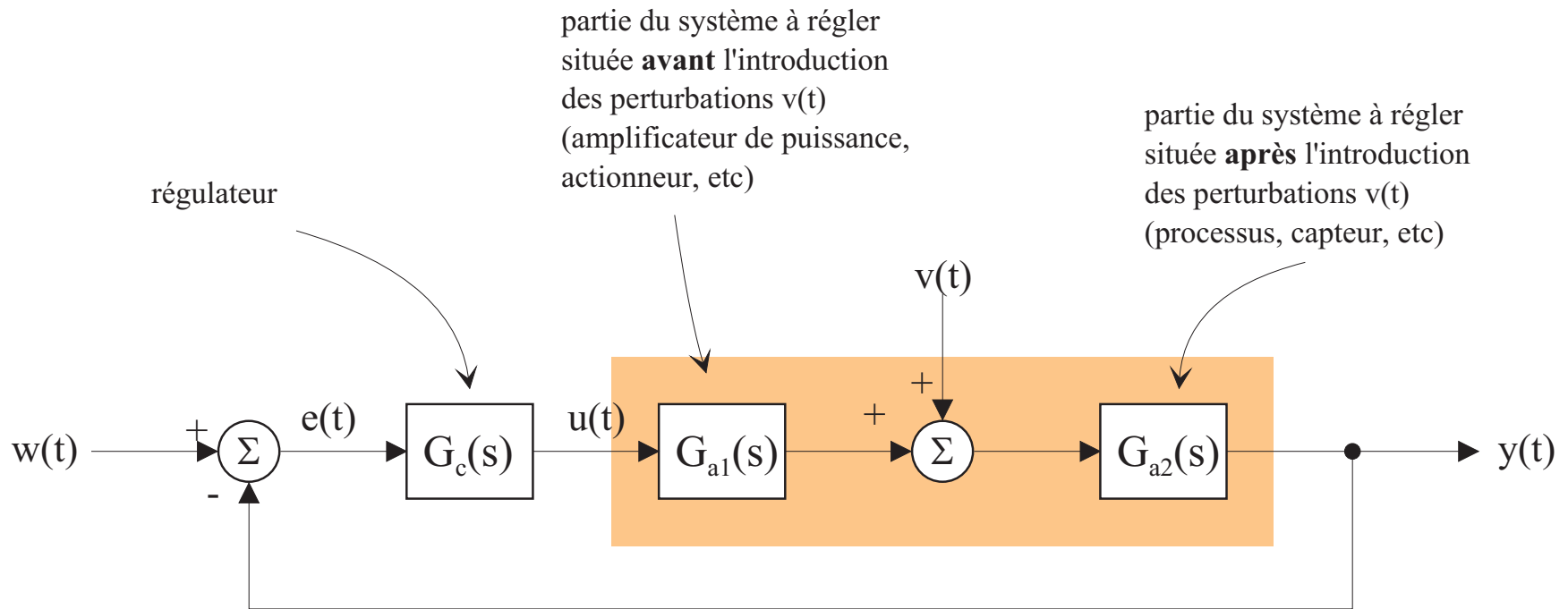


f_04_23.eps

Fonctions de transfert :

1. Du système à régler $G_a(s)$
2. En boucle ouverte $G_o(s)$
3. En boucle fermée, régulation de correspondance $G_w(s)$
4. En boucle fermée, régulation de maintien $G_v(s)$

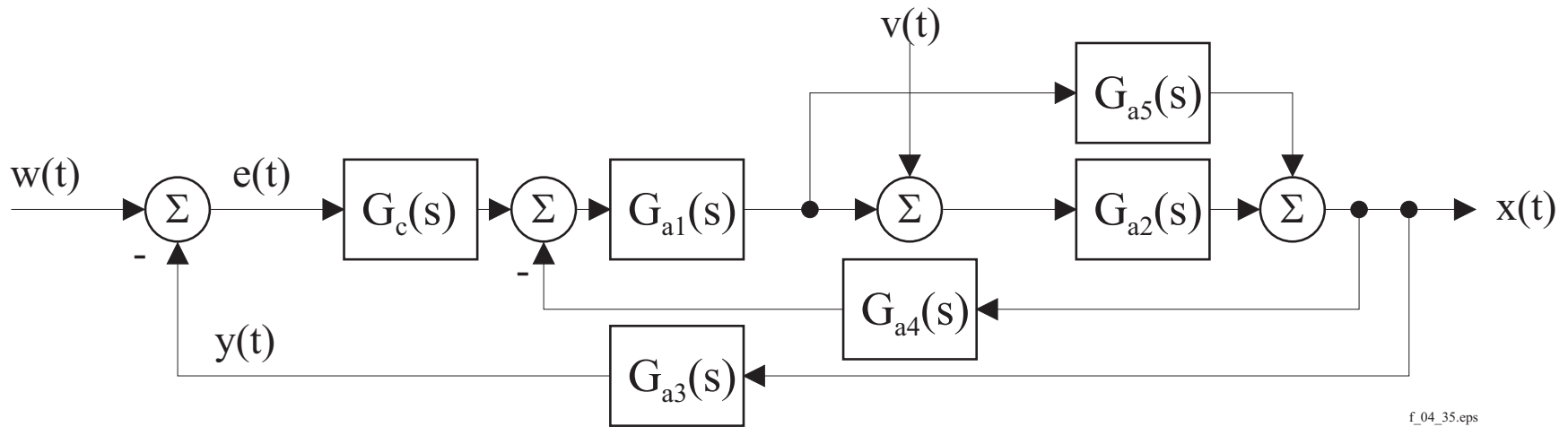
Systeme à regler



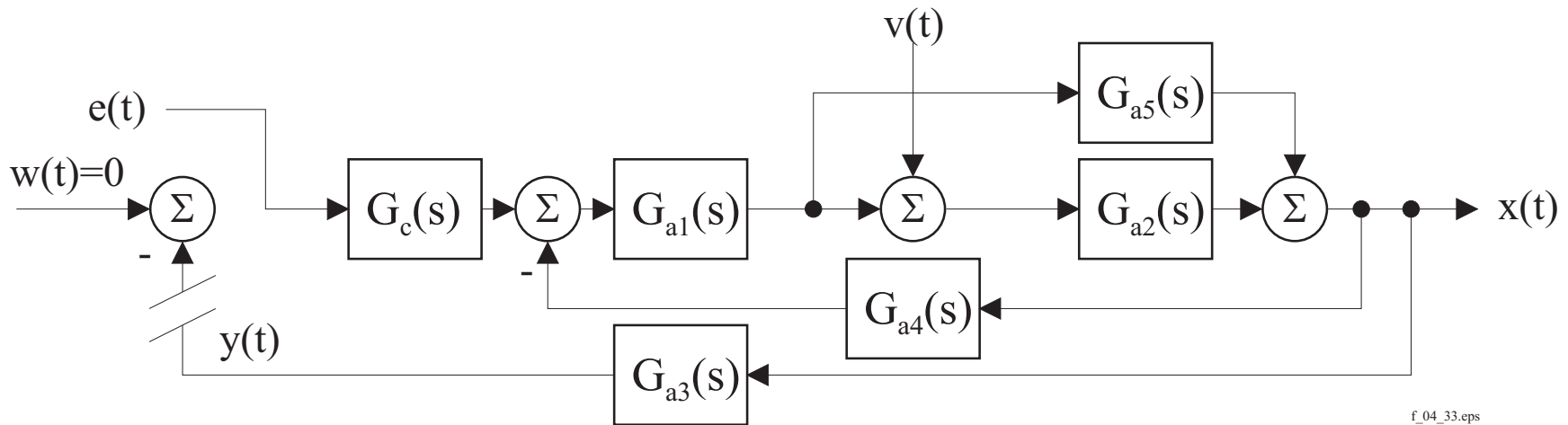
f_04_23.eps

$$G_a(s) = \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{v(t)=0} = G_{a1}(s) \cdot G_{a2}(s)$$

Fonction de transfert en boucle ouverte $G_o(s)$

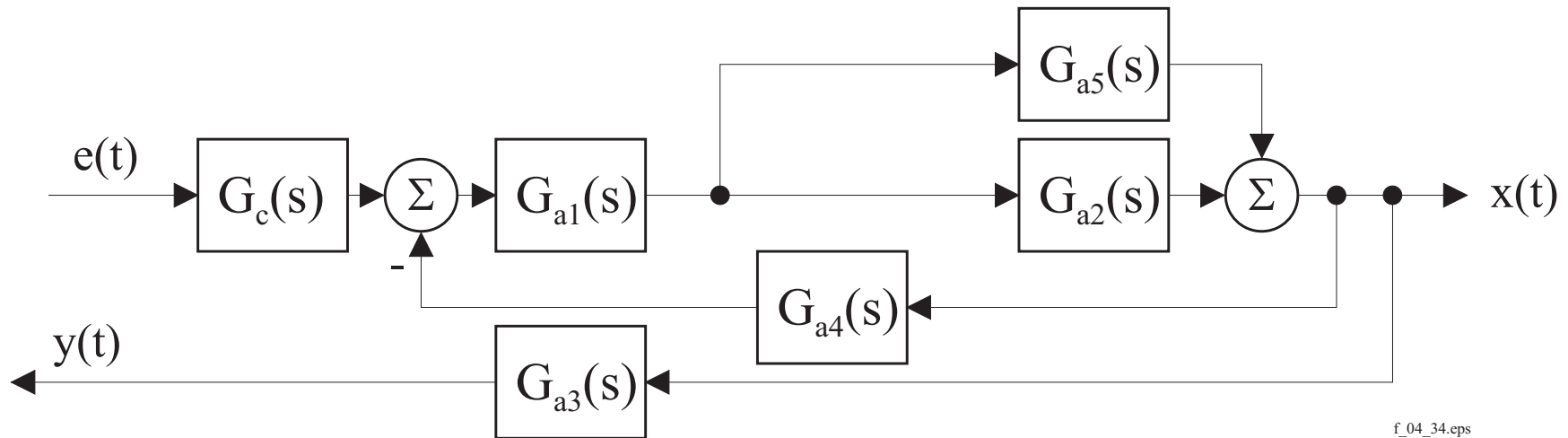


Fonction de transfert en boucle ouverte $G_o(s)$



1. Couper la boucle en amont du comparateur
2. Annuler les signaux d'entrée $w(t)$ et $v(t)$

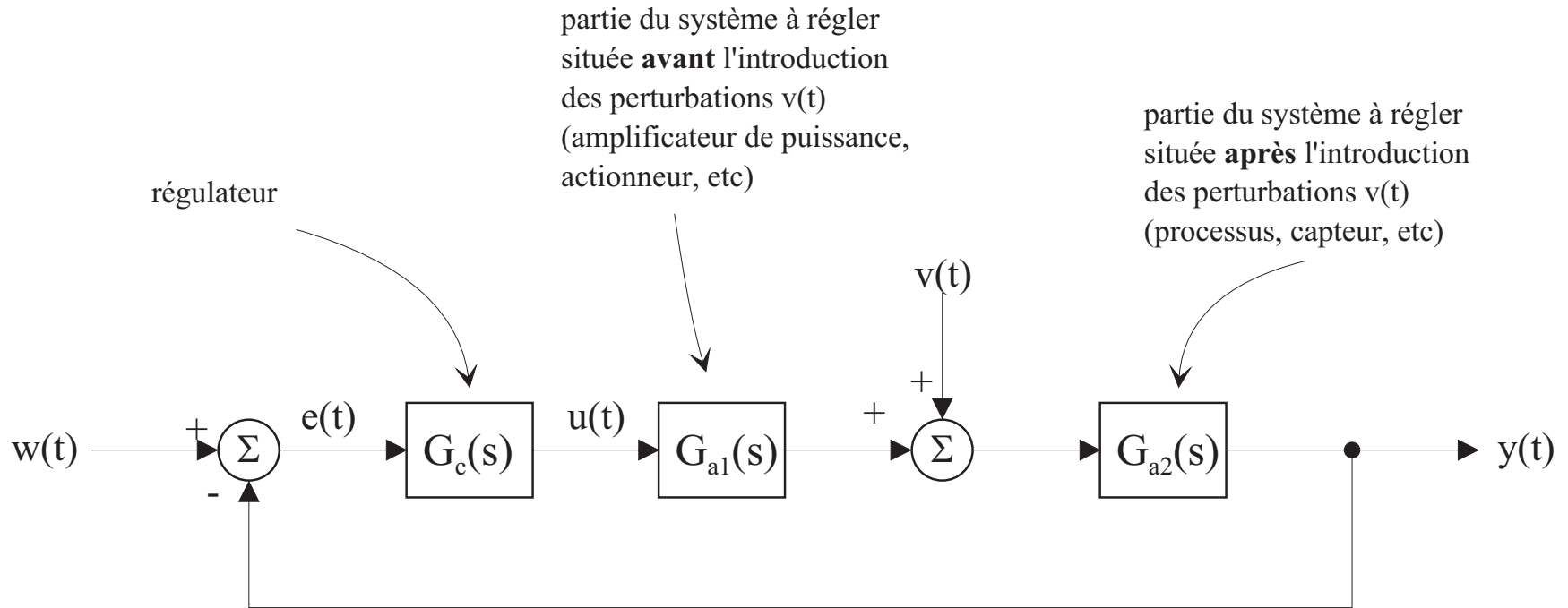
Fonction de transfert en boucle ouverte $G_o(s)$



3. Calculer

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{Y(s)}{E(s)} \Big|_{w(t)=0, v(t)=0, \text{ boucle ouverte}} \\ &= G_c(s) \cdot G_a(s) \end{aligned}$$

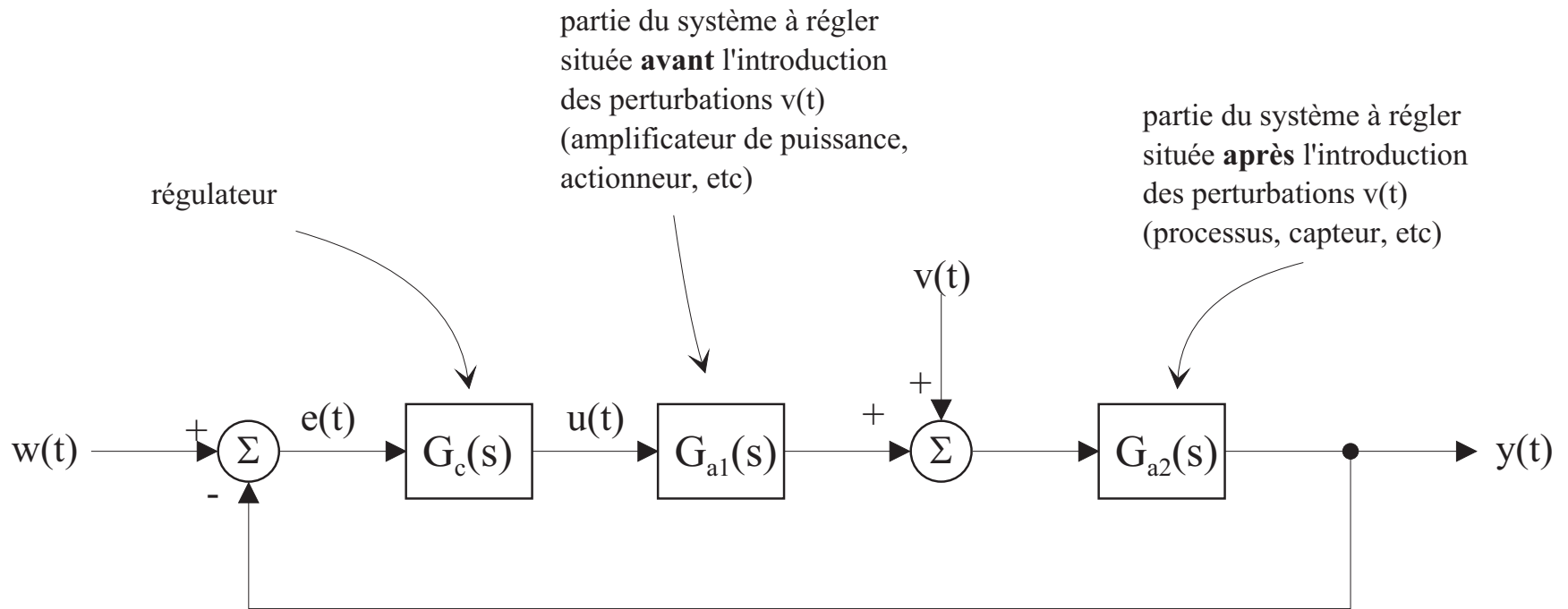
Régulation de correspondance



f_04_23.eps

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} \Big|_{v(t)=0} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$$

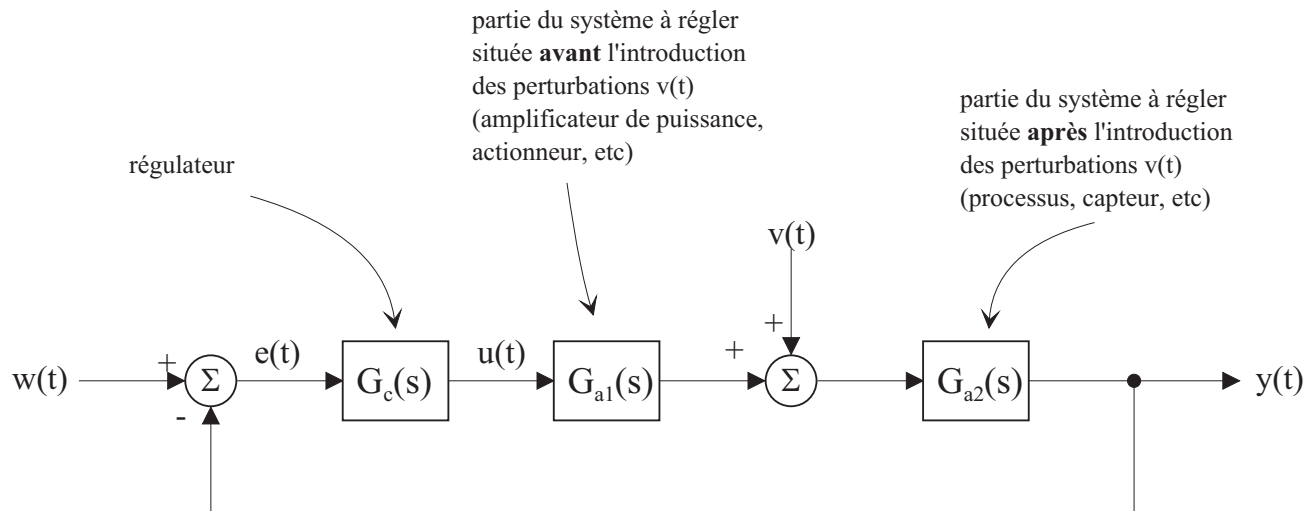
Régulation de maintien



f_04_23.eps

$$G_v(s) = \left. \frac{Y(s)}{V(s)} \right|_{w(t)=0} = \frac{G_{a2}(s)}{1 + G_o(s)}$$

Application du principe de superposition



f_04_23.eps

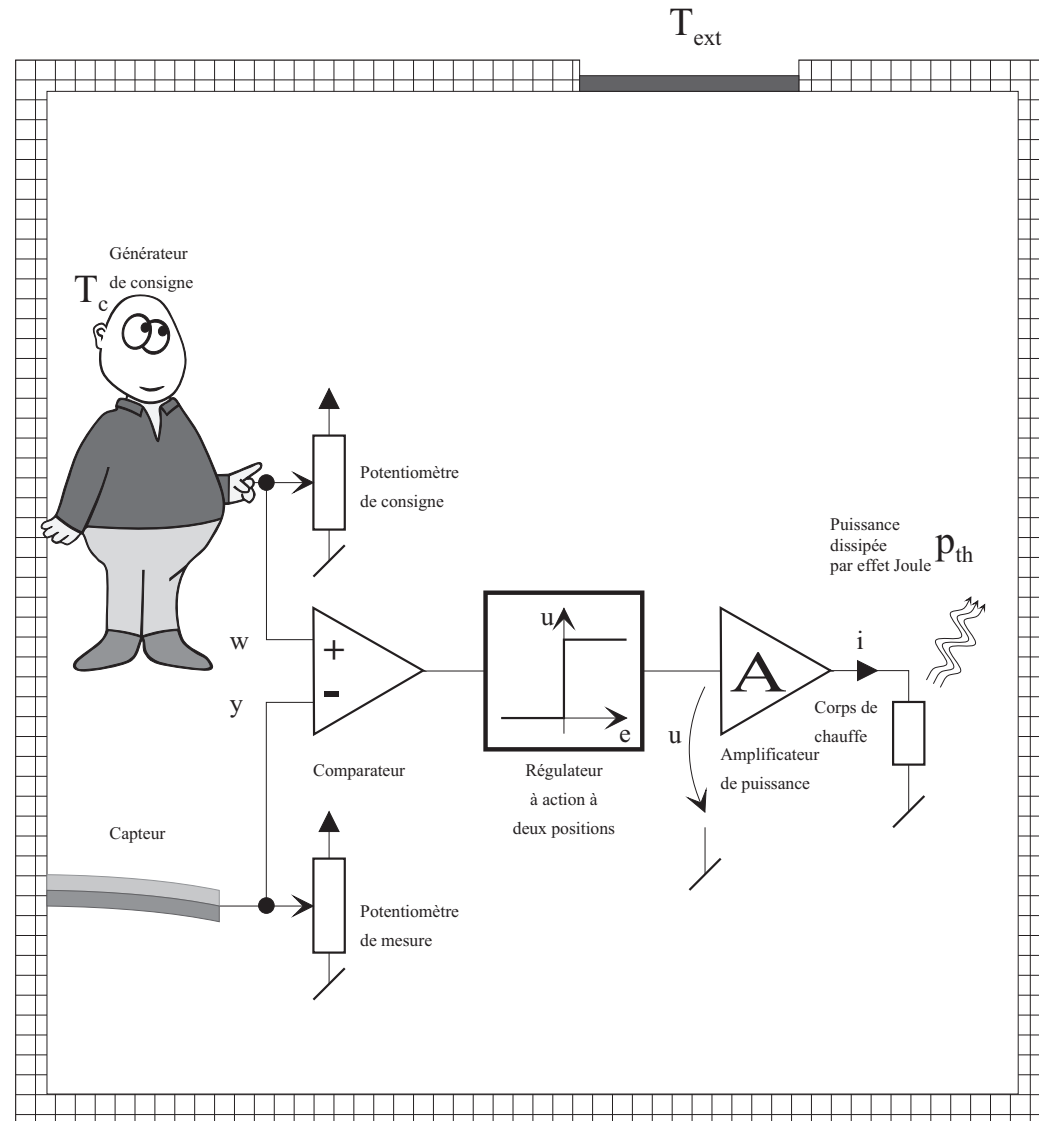
$$Y(s) = G_w(s) \cdot W(s) + G_v(s) \cdot V(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G_w(s) \cdot W(s)\} + \mathcal{L}^{-1} \{G_v(s) \cdot V(s)\}$$

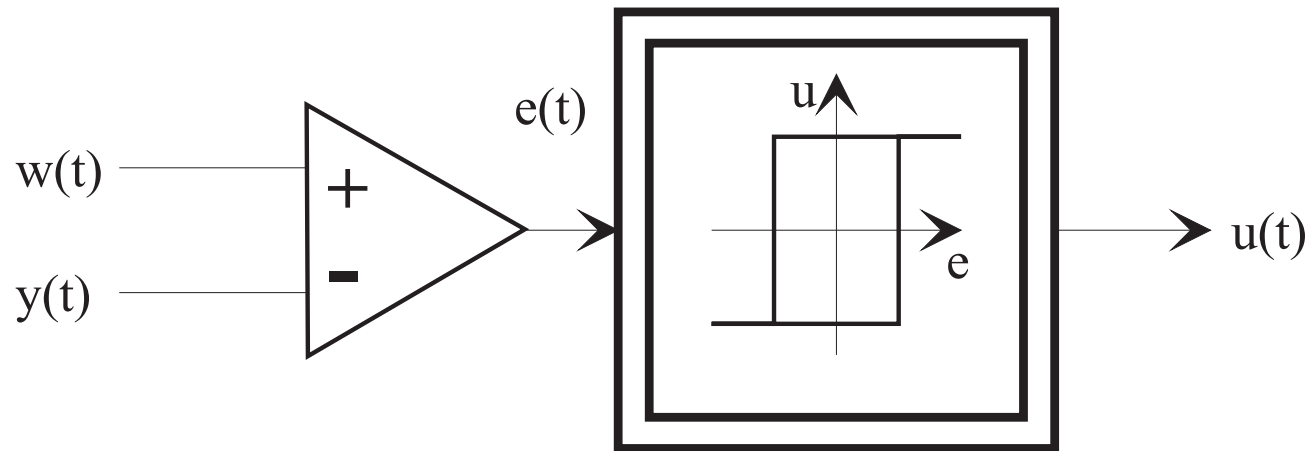


Régulateur PID

Régulateurs non-linéaires



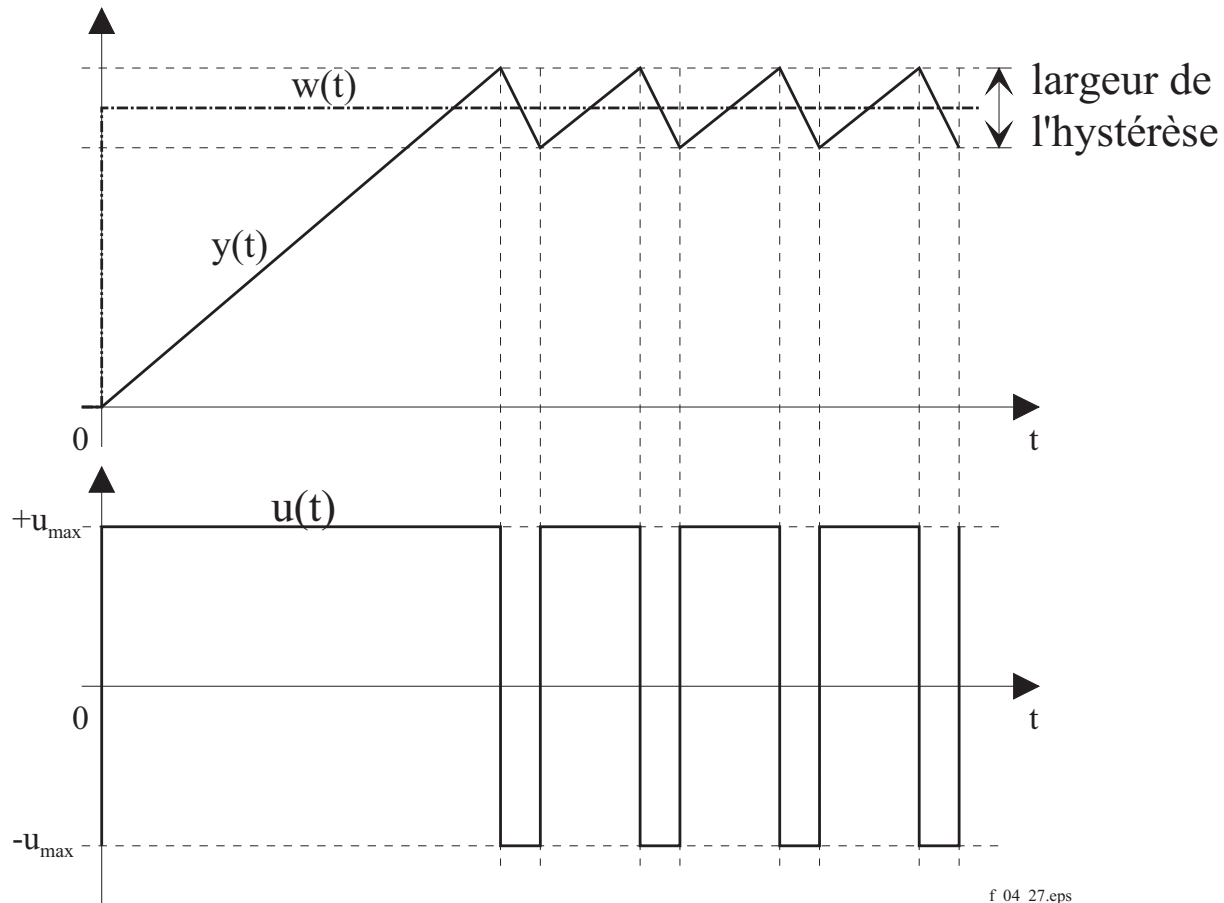
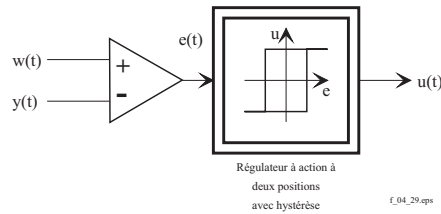
Régulateurs non-linéaires



Régulateur à action à
deux positions
avec hystérèse

f_04_29.eps

Régulateurs non-linéaires



Régulateur P



Loi de commande du régulateur P :

$$u(t) = K_p \cdot e(t)$$



Loi de commande du régulateur P :

$$u(t) = K_p \cdot e(t)$$

Fonction de transfert du régulateur P :

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$



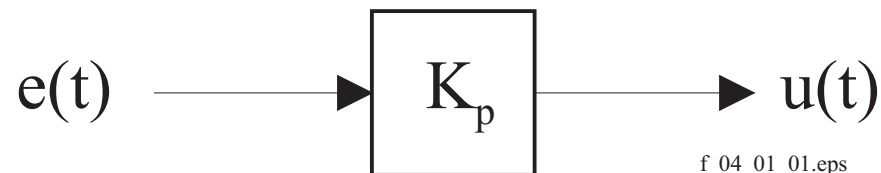
Loi de commande du régulateur P :

$$u(t) = K_p \cdot e(t)$$

Fonction de transfert du régulateur P :

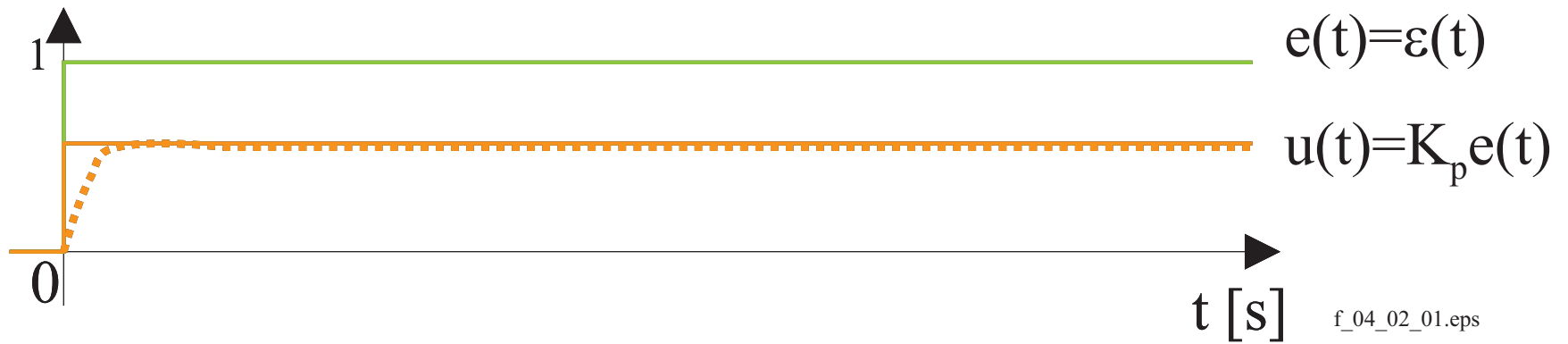
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

Schéma fonctionnel du régulateur P :



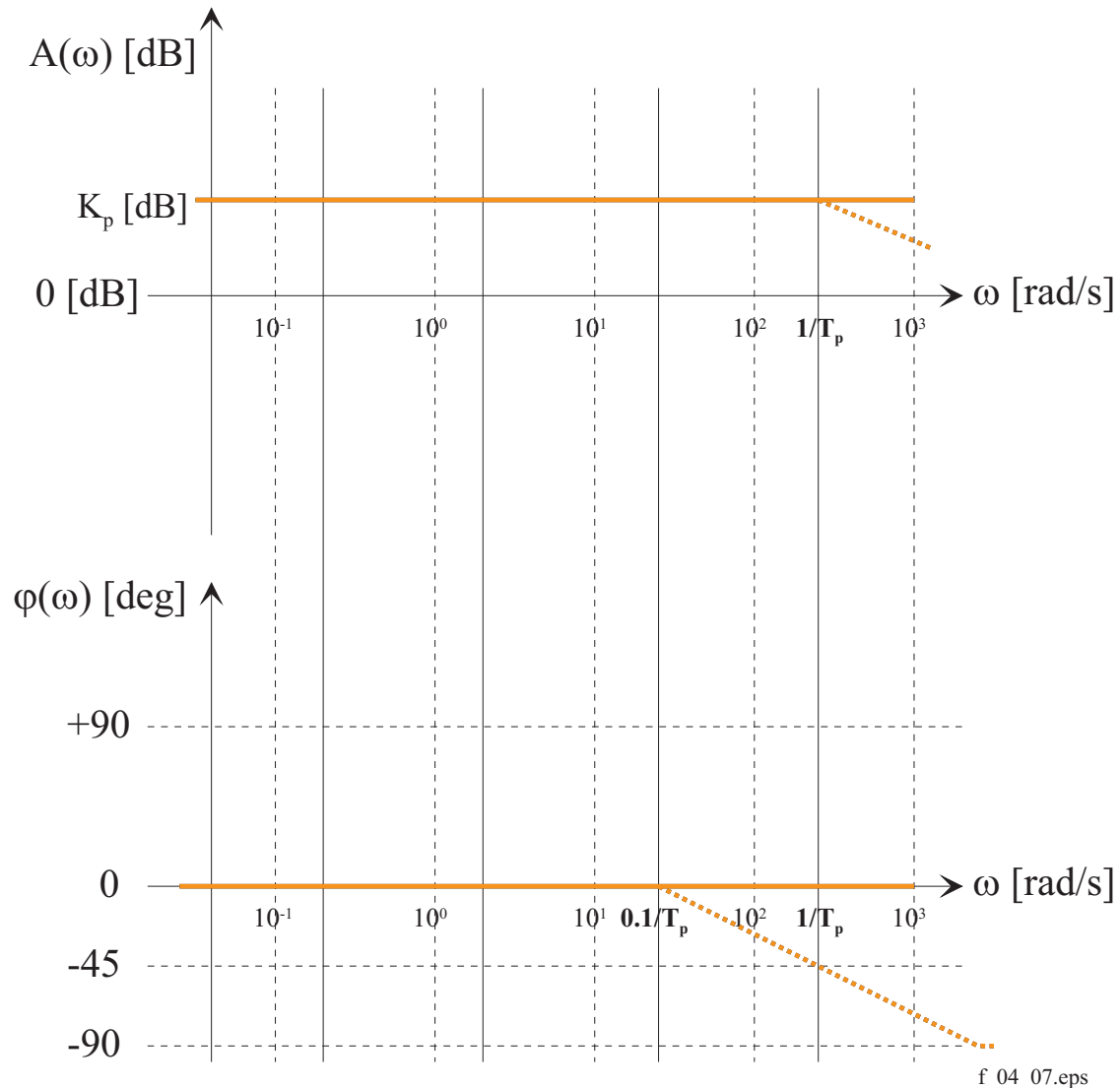
f_04_01_01.eps

Réponse indicielle du régulateur P

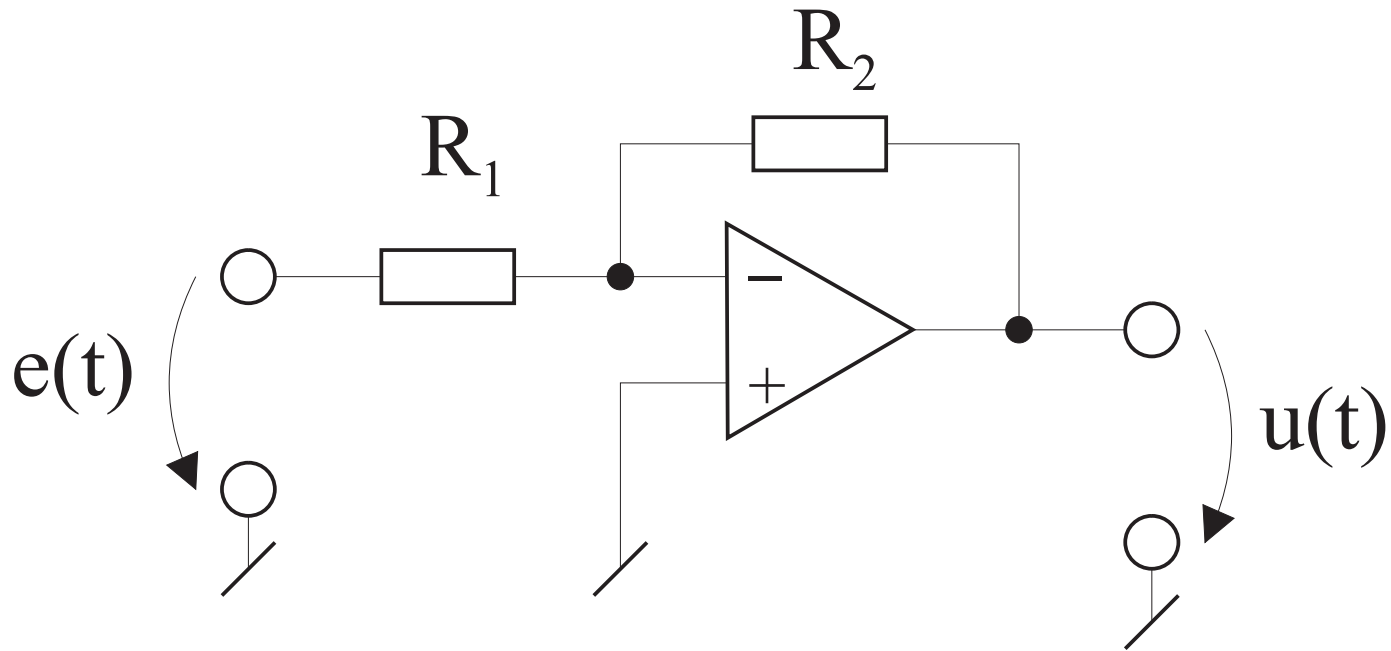


$$u(t) = K_p \cdot e(t)$$

Réponse harmonique du régulateur P



Réalisation électronique de principe du régulateur P



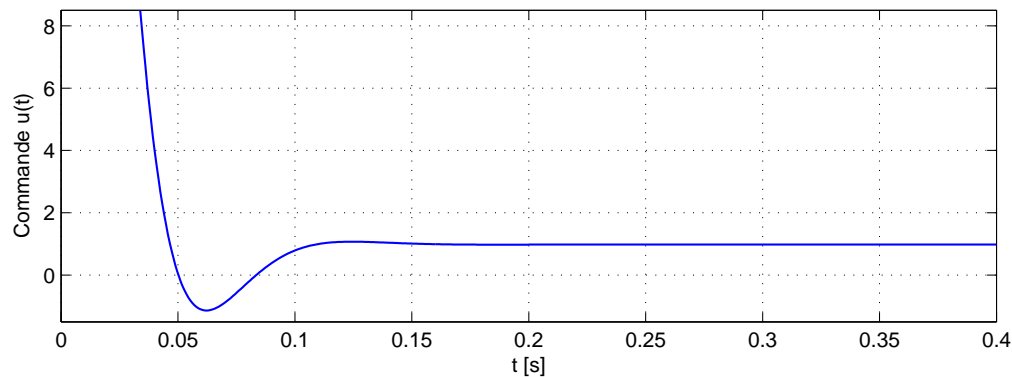
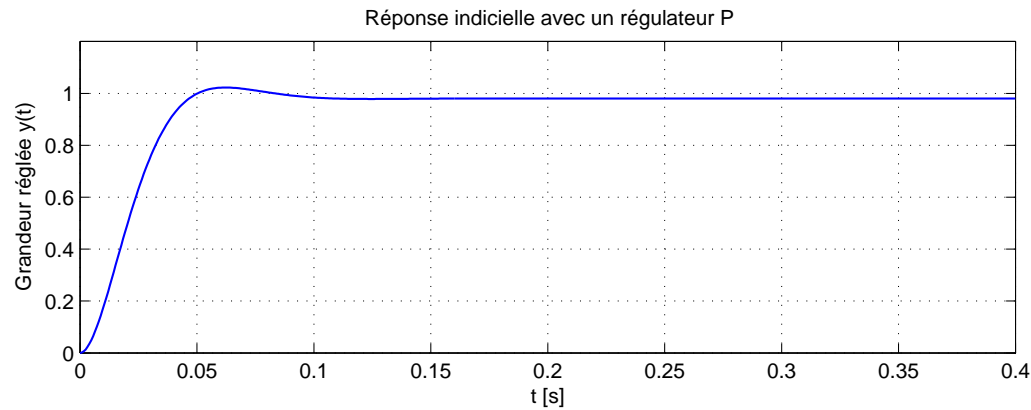
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = -\frac{R_2}{R_1}$$

f_04_18_01.eps

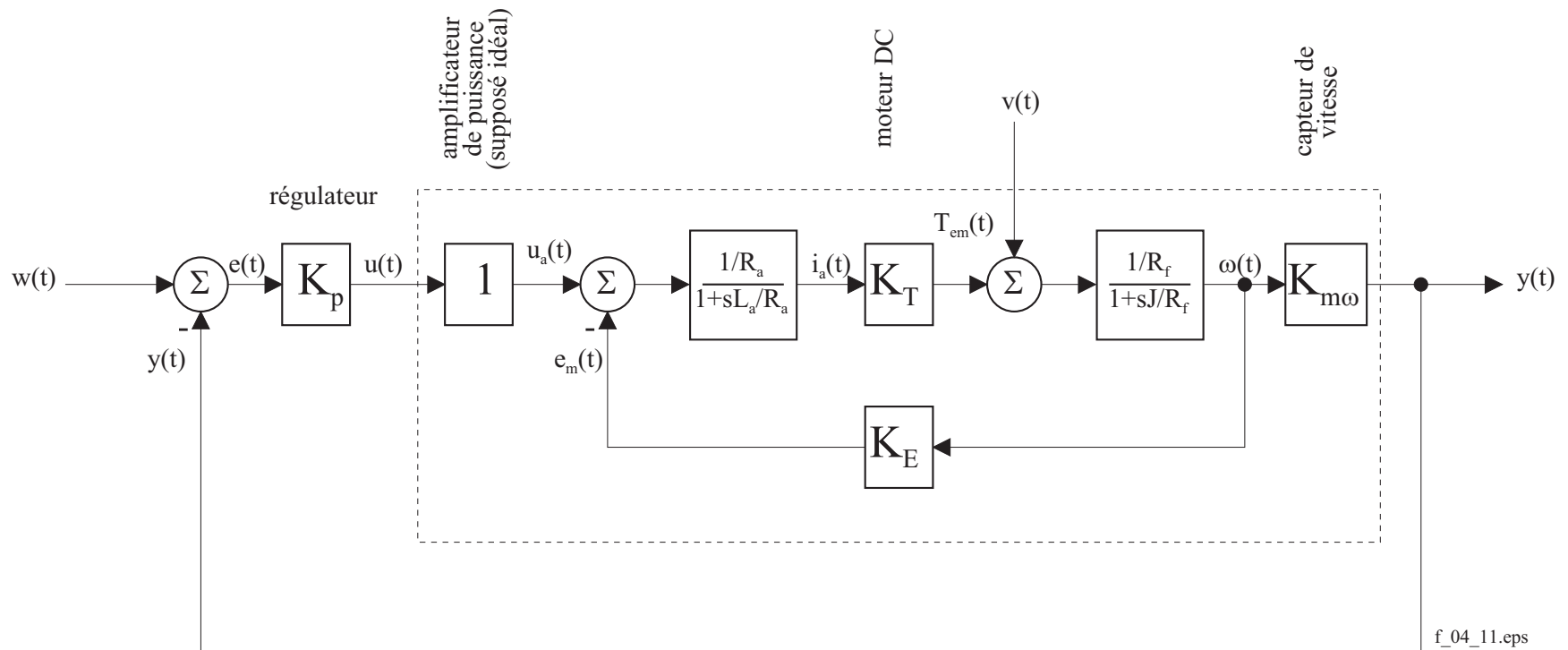
Limite du régulateur P : erreur statique E_∞



$$u(t) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) = K_p \cdot e(t) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e(t) \neq 0$$

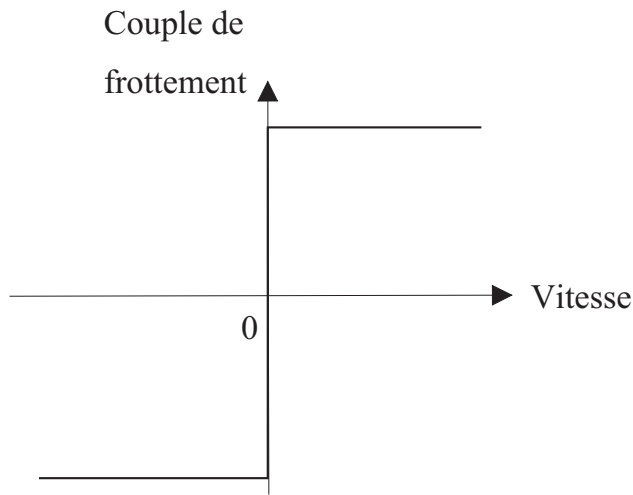


Limite du régulateur P : erreur statique E_∞

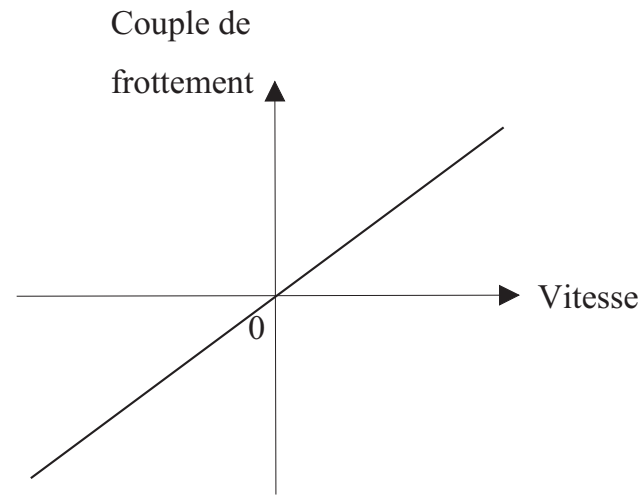


$$u_a(t) = R_a \cdot \underbrace{i_a(t)}_{\frac{T_{em}}{K_T} = 0 \text{ [A]}} + \underbrace{e_m(t)}_{K_E \cdot \omega \neq 0 \text{ [V]}}$$

Limite du régulateur P : erreur statique E_∞



Frottement sec pur

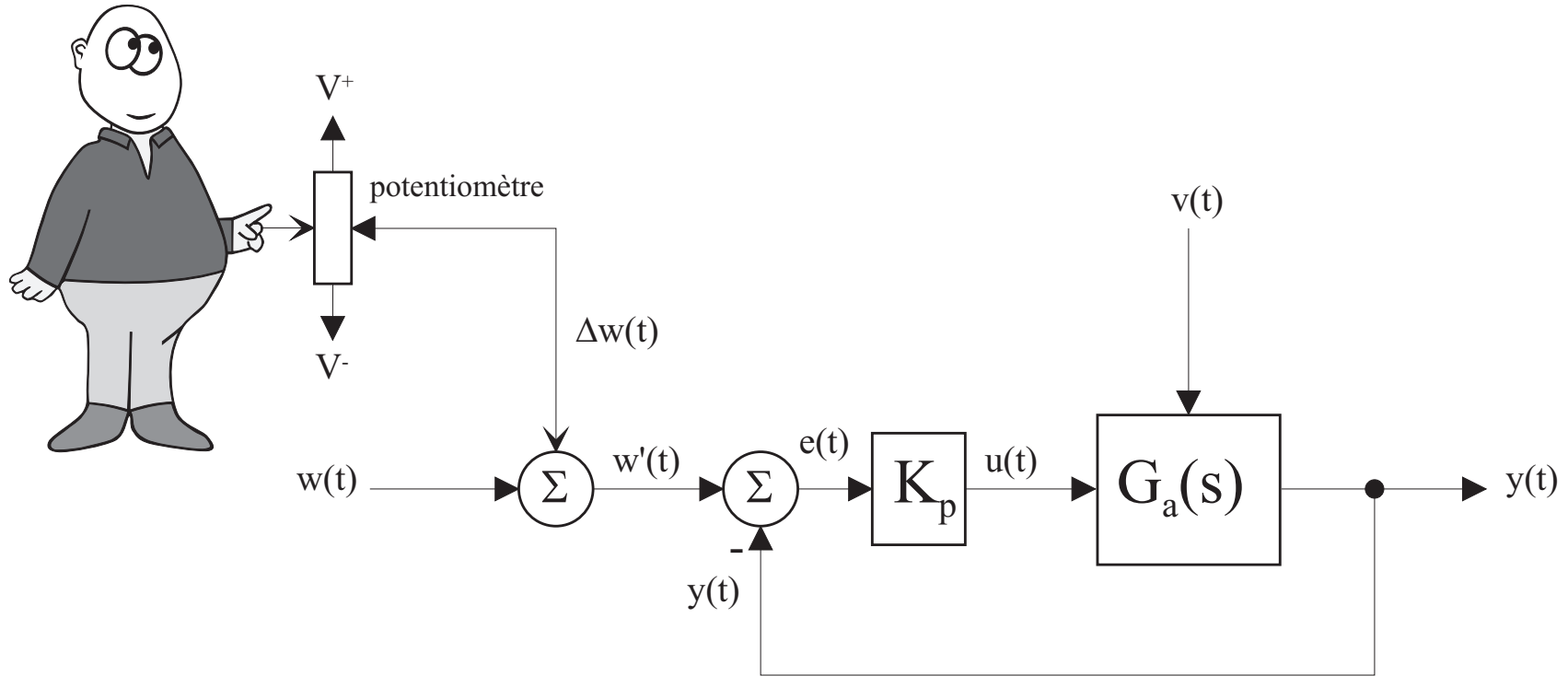


Frottement visqueux linéaire

f_04_38.eps

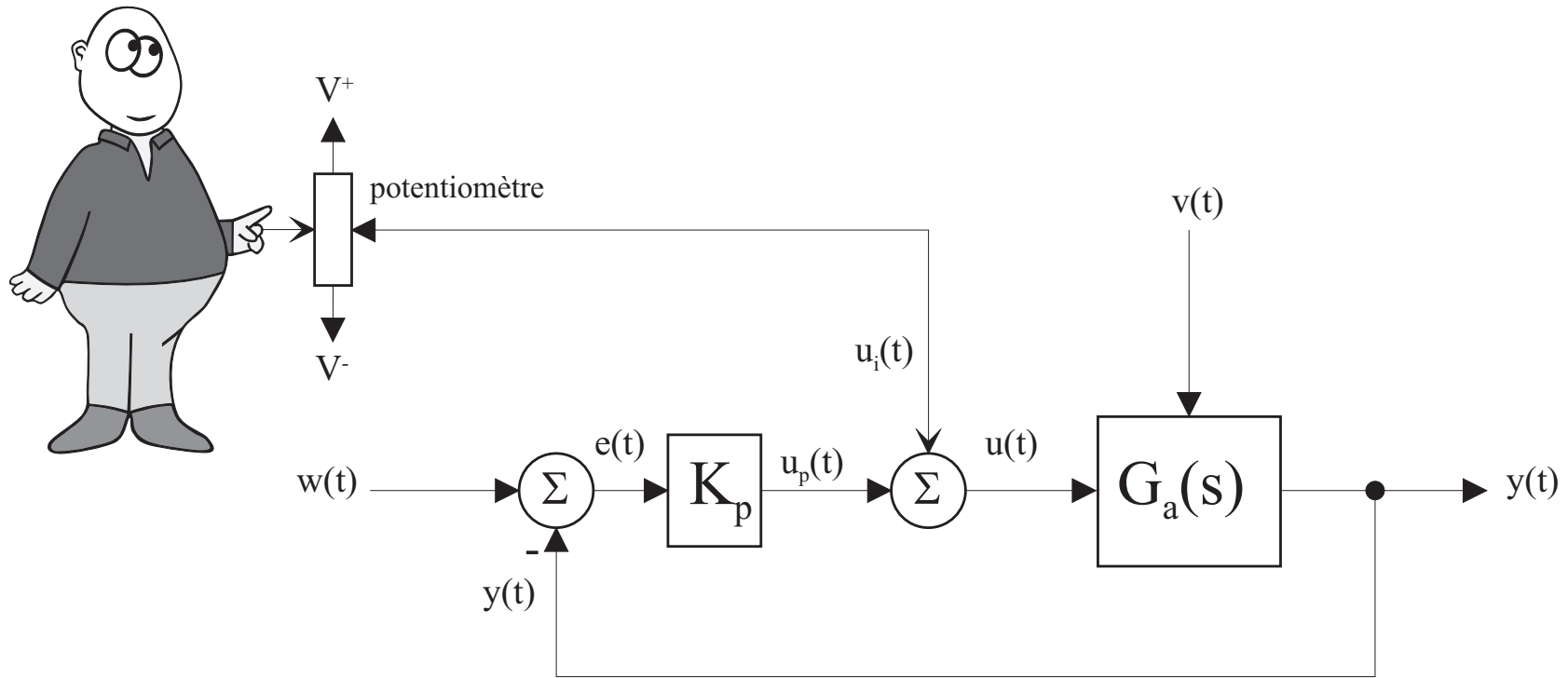
$$u_a(t) = R_a \cdot \overbrace{i_a(t)}^{\frac{T_{em}}{K_T} \neq 0 \text{ [A]}} + \overbrace{e_m(t)}^{K_E \cdot \omega \neq 0 \text{ [V]}}$$

Annulation de E_∞ : action sur $w(t)$



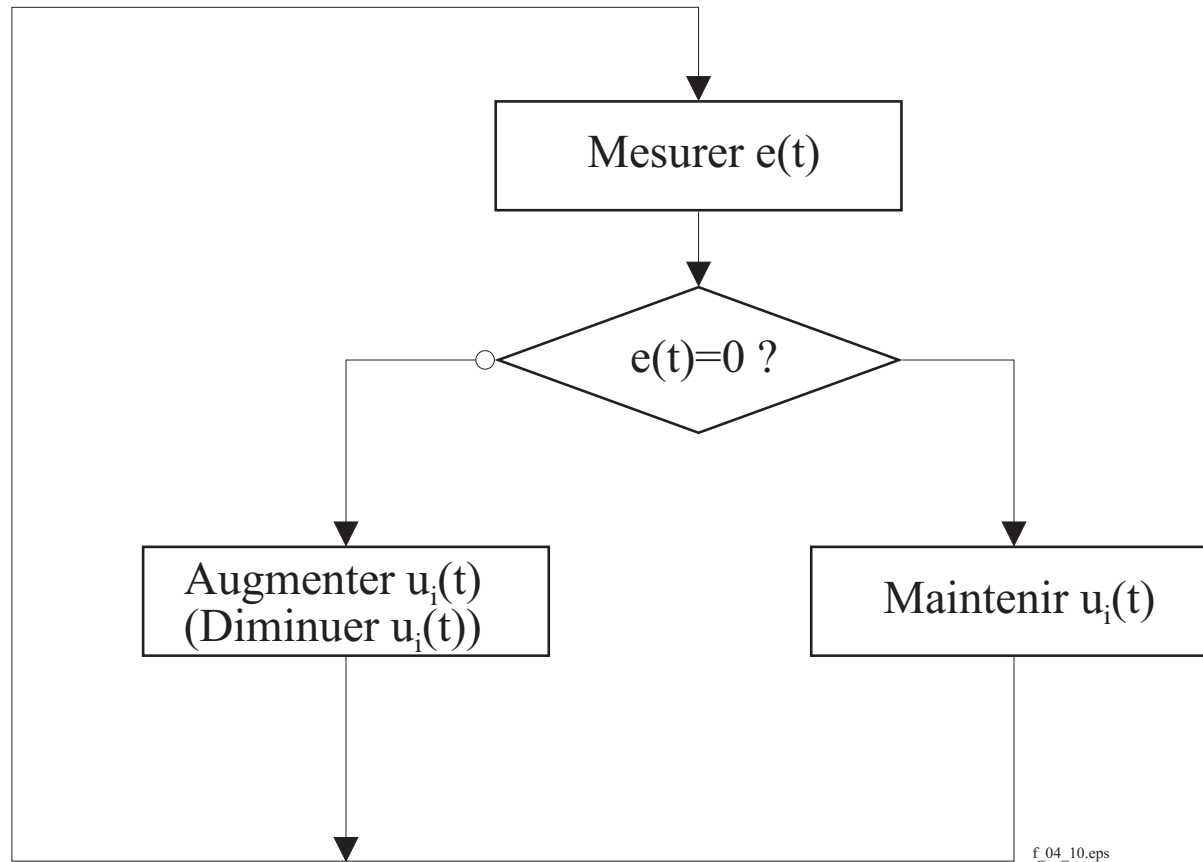
f_04_12_01.eps

Annulation de E_∞ : action sur $u(t)$

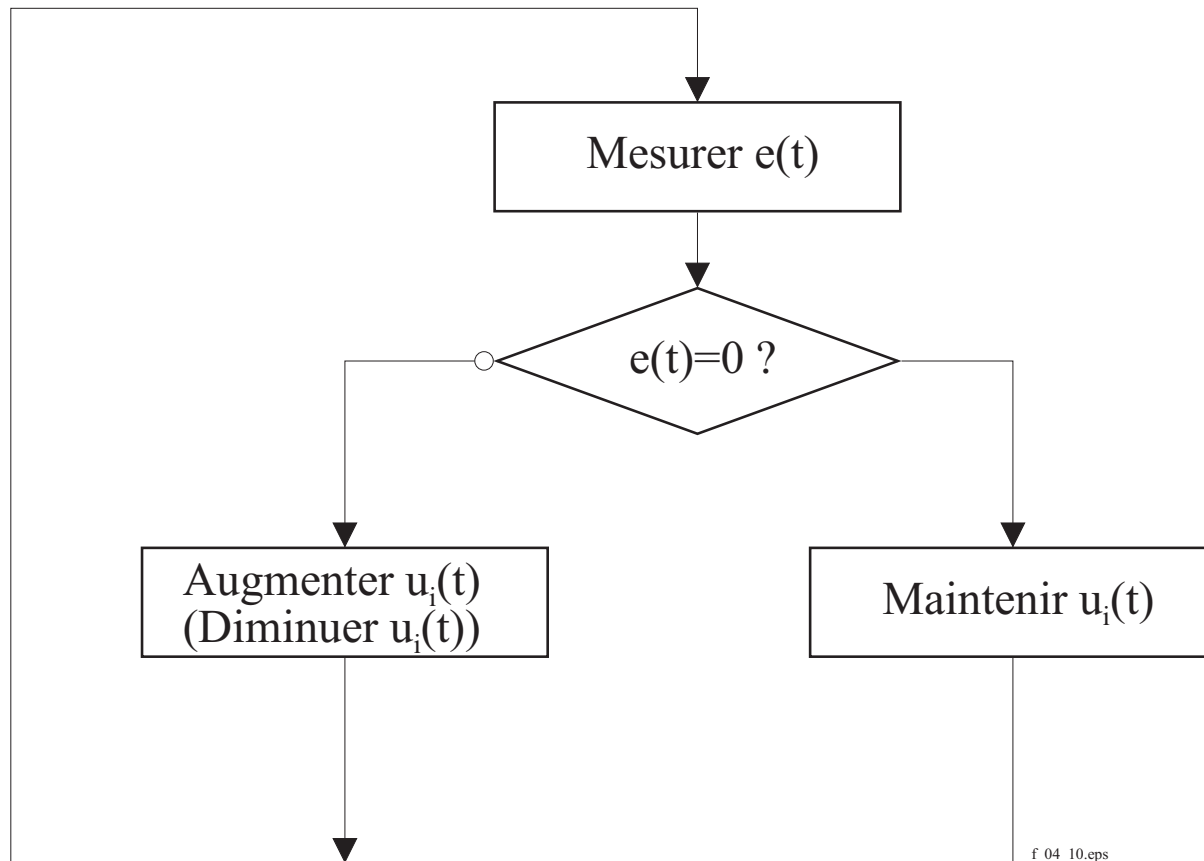


f_04_12_02.eps

Schématisation de la procédure



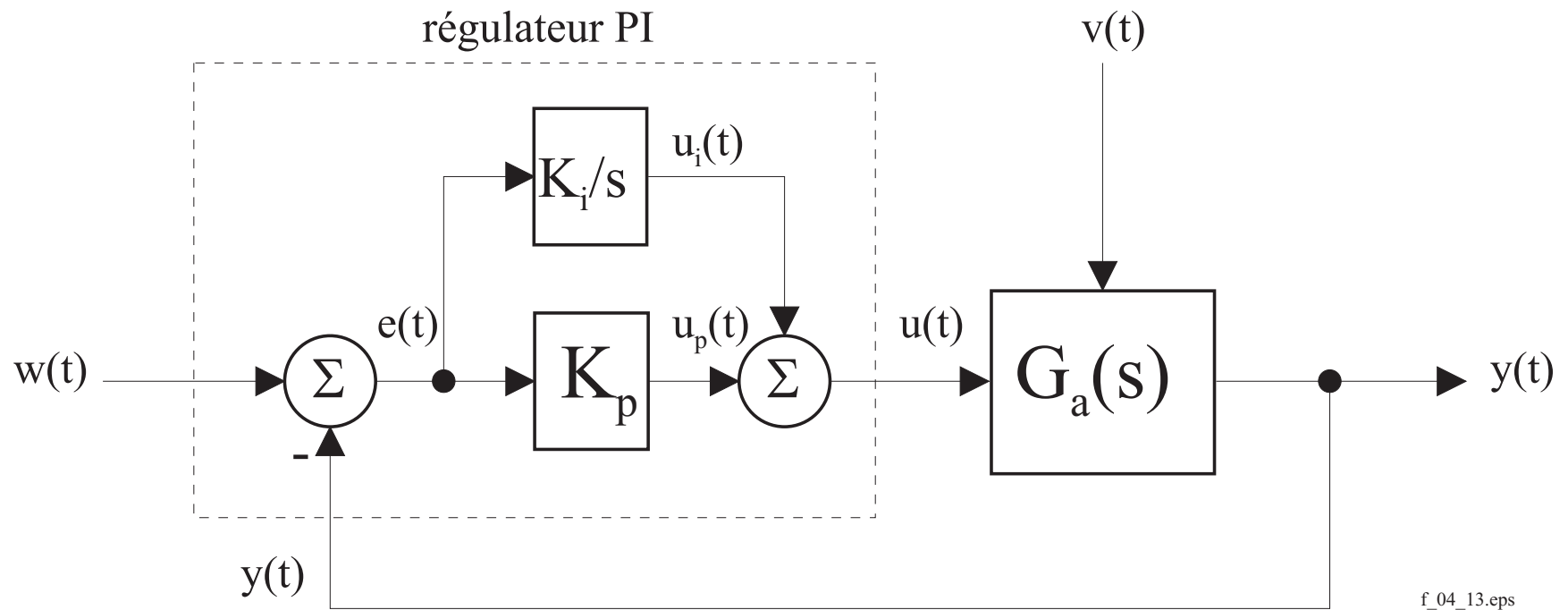
Schématisation de la procédure



f_04_10.eps

intégrer l'erreur ! $u_i(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot d\tau$

Régulateur PI



f_04_13.eps

Régulateur PI



Loi de commande :

$$u(t) = K_p \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot d\tau \right)$$

Régulateur PI



Loi de commande :

$$u(t) = K_p \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot d\tau \right)$$

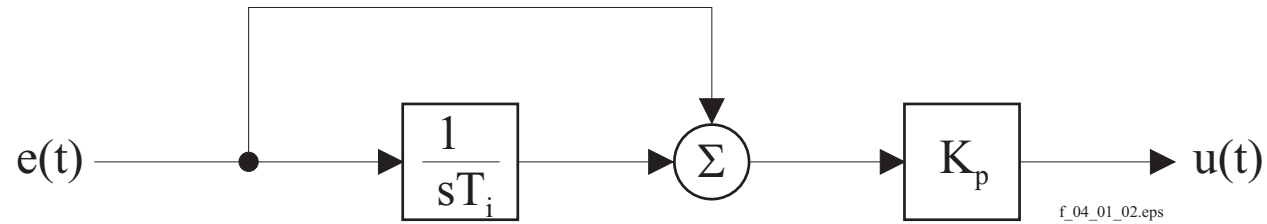
Fonction de transfert :

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \frac{1 + s \cdot T_i}{s \cdot T_i}$$

Régulateur PI



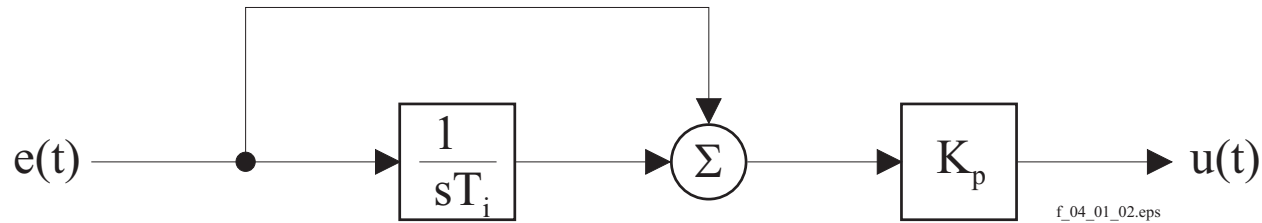
Schéma fonctionnel :



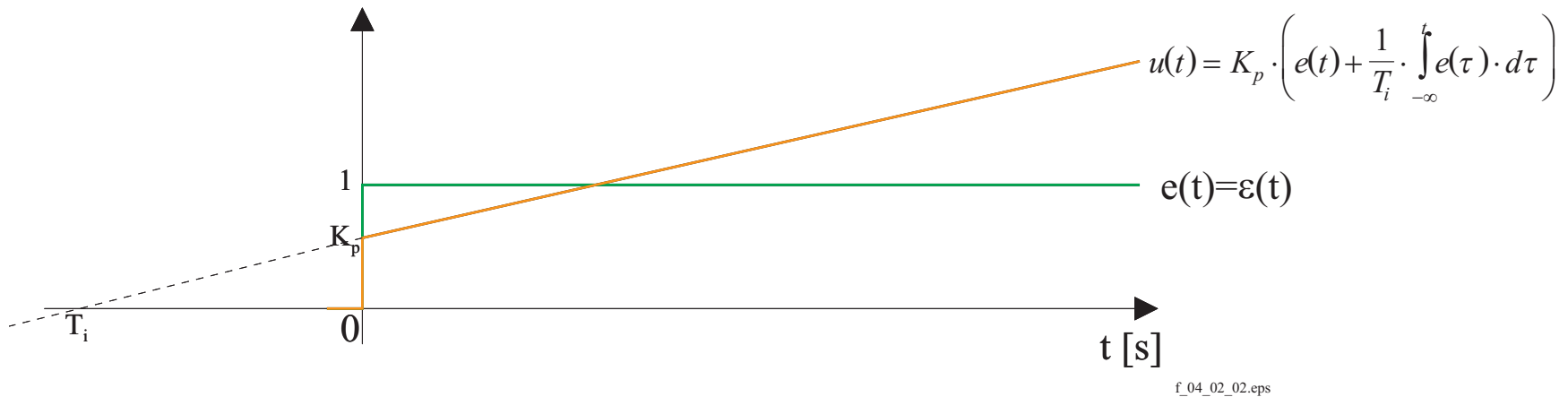
Régulateur PI



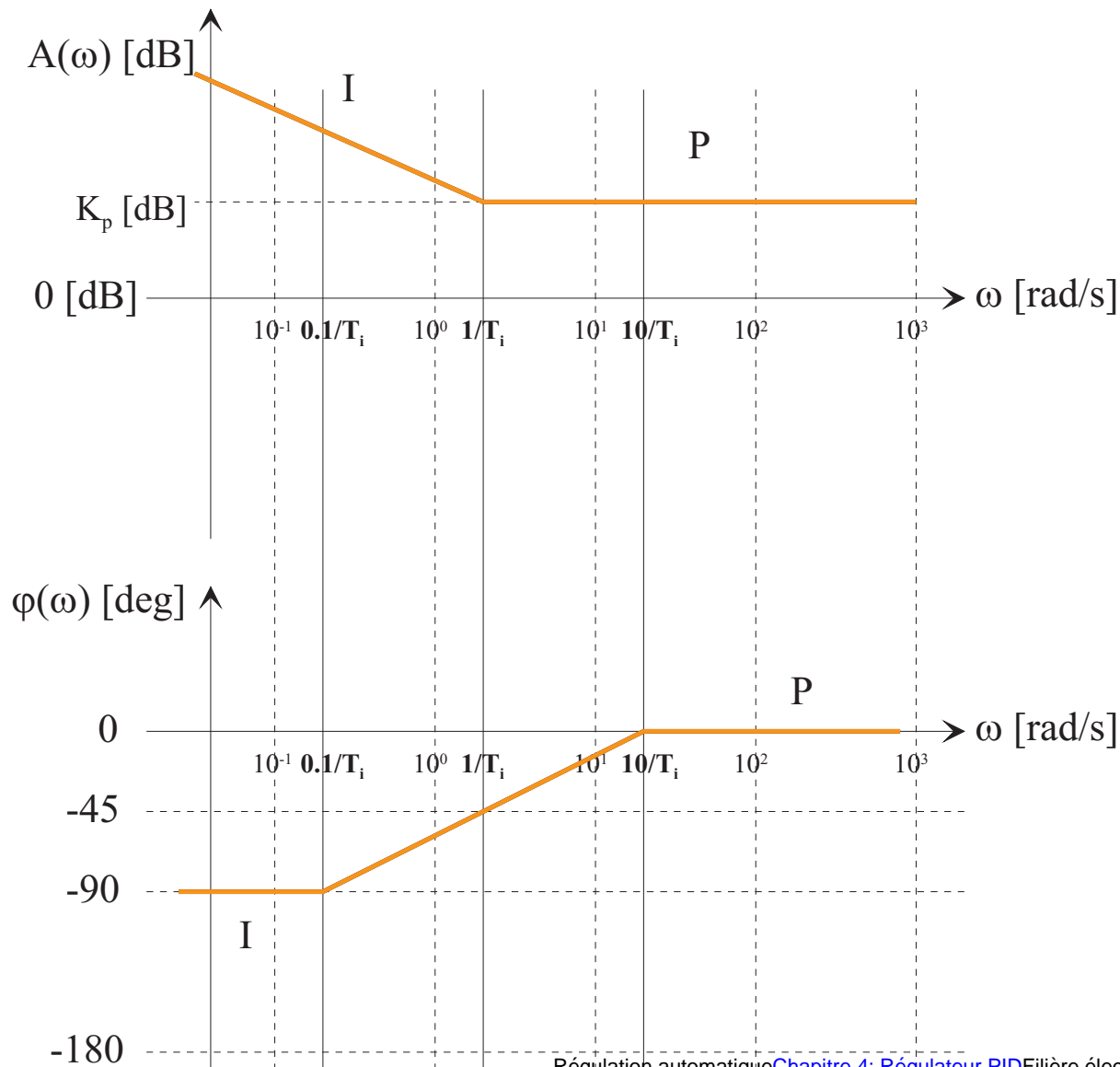
Schéma fonctionnel :



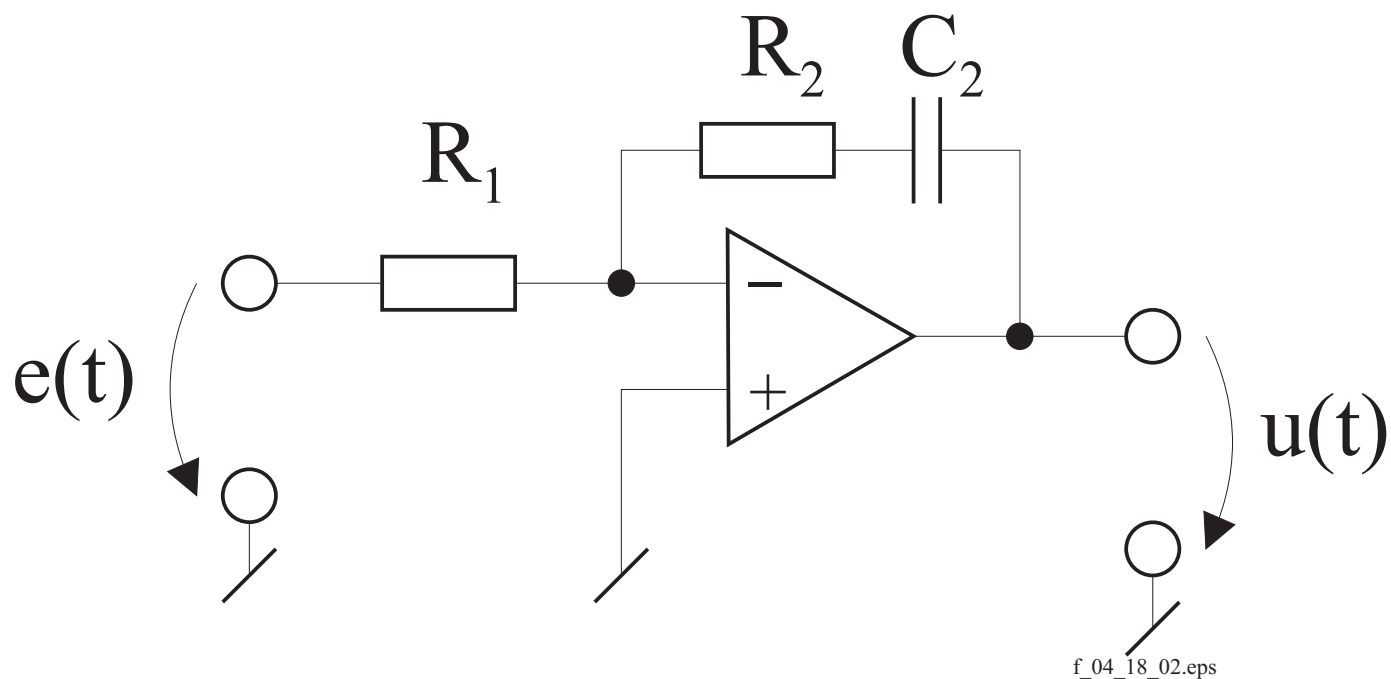
Réponse indicielle :



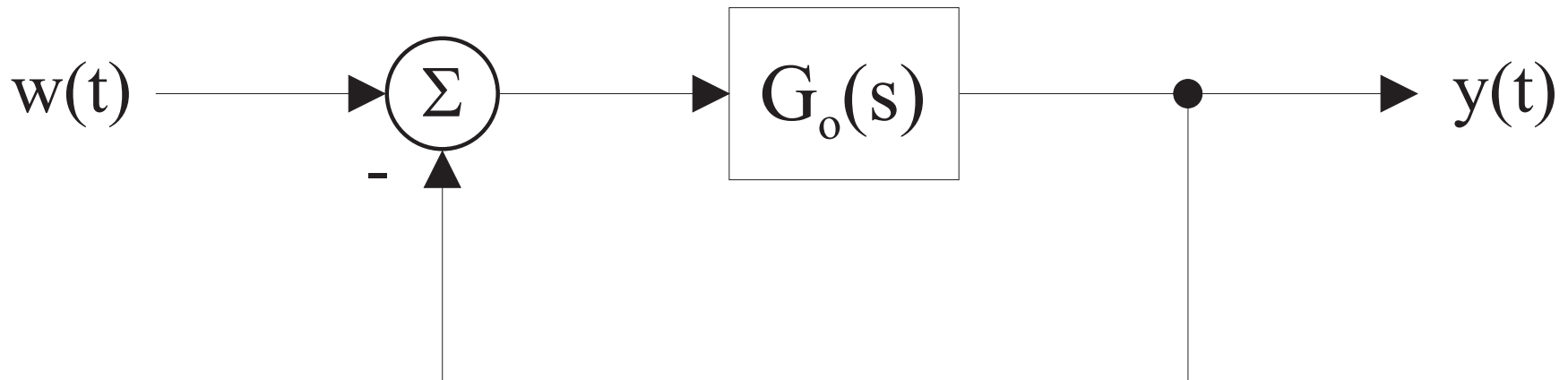
Régulateur PI : réponse harmonique



Régulateur PI : schéma électronique de principe



Annulation de E_∞ (correspondance)

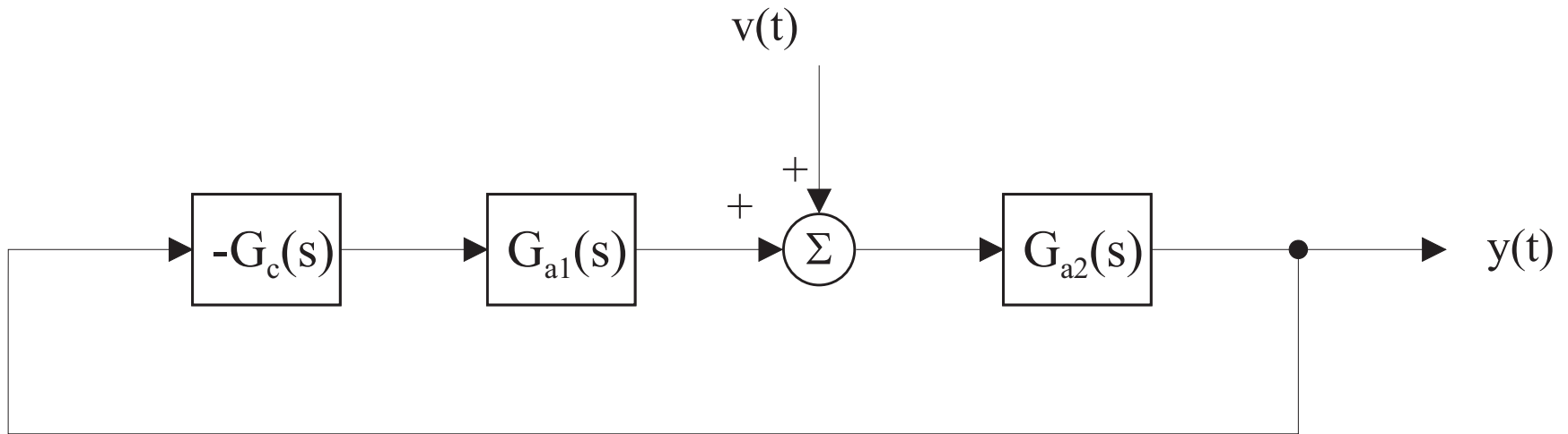


$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}$$

f_04_24.eps

$$G_w(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot \omega)}{W(j \cdot \omega)} = \frac{G_o(j \cdot \omega)}{1 + G_o(j \cdot \omega)} \rightarrow \frac{\infty}{1 + \infty} \rightarrow 1$$

Annulation de E_∞ (maintien)



$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_{a2}(s)}{1 + G_o(s)}$$

f_04_26.eps

$$G_v(j \cdot \omega) = \frac{Y(j \cdot \omega)}{V(j \cdot \omega)} = \frac{G_{a2}(j \cdot \omega)}{1 + G_o(j \cdot \omega)} \rightarrow \frac{G_{a2}(j \cdot \omega)}{1 + \infty} \rightarrow 0$$

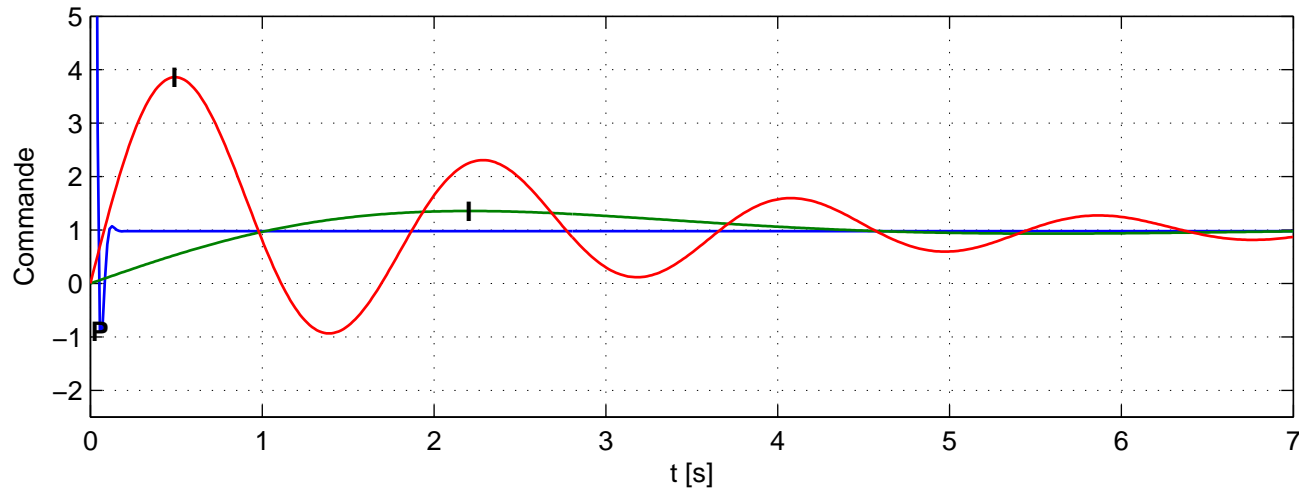
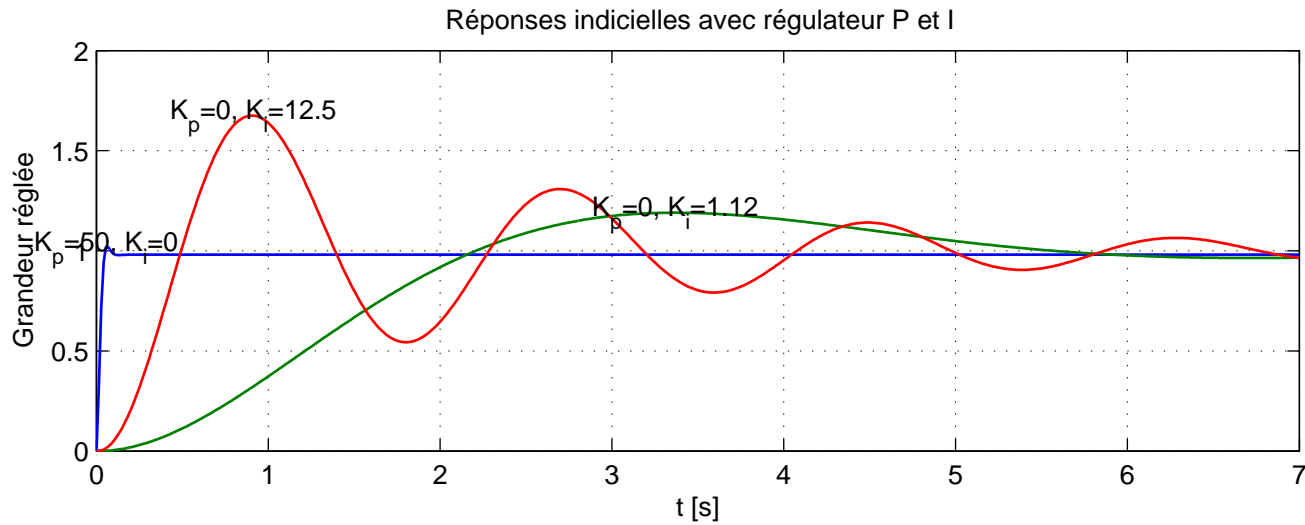
Robustesse des performances en basse fréquence



$$\begin{aligned}G_w(j \cdot \omega) &= \frac{Y(j \cdot \omega)}{W(j \cdot \omega)} = \frac{G_c(j \cdot \omega) \cdot G_a(j \cdot \omega)}{1 + G_c(j \cdot \omega) \cdot G_a(j \cdot \omega)} \\ &\rightarrow \frac{\infty \cdot G_a(j \cdot \omega)}{1 + \infty \cdot G_a(j \cdot \omega)} \\ &\rightarrow 1\end{aligned}$$

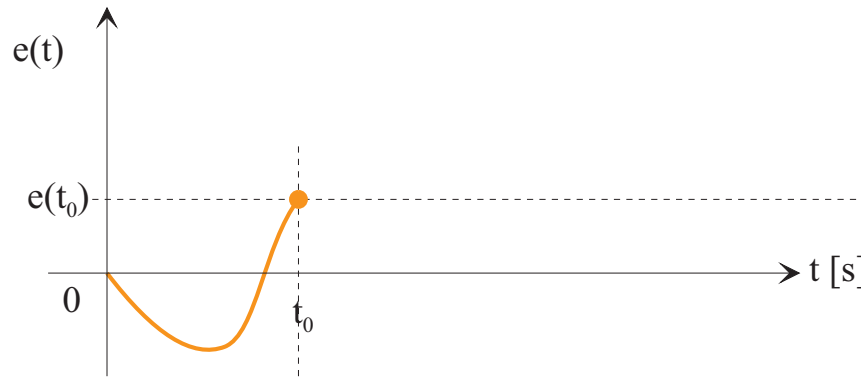
$$\begin{aligned}G_v(j \cdot \omega) &= \frac{Y(j \cdot \omega)}{V(j \cdot \omega)} = \frac{G_{a2}(j \cdot \omega)}{1 + G_c(j \cdot \omega) \cdot G_a(j \cdot \omega)} \\ &\rightarrow \frac{G_{a2}(j \cdot \omega)}{1 + \infty \cdot G_a(j \cdot \omega)} \\ &\rightarrow 0\end{aligned}$$

Effet déstabilisant de l'action I

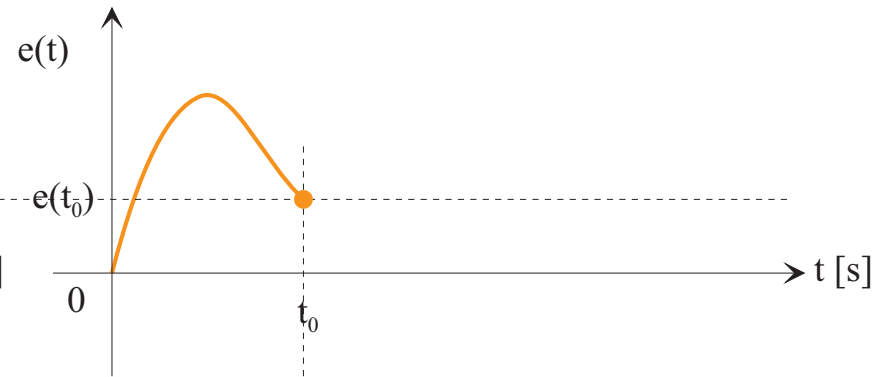


f_ch_04_02_1.eps

Prise en compte de l'évolution de $e(t)$



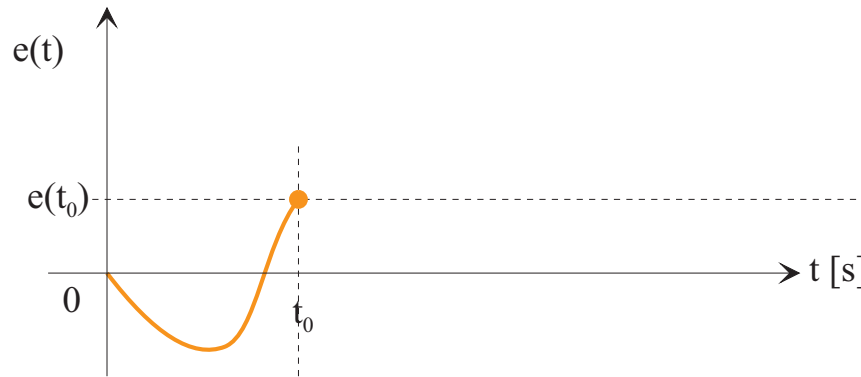
Situation 1 : l'erreur croît en $t=t_0$



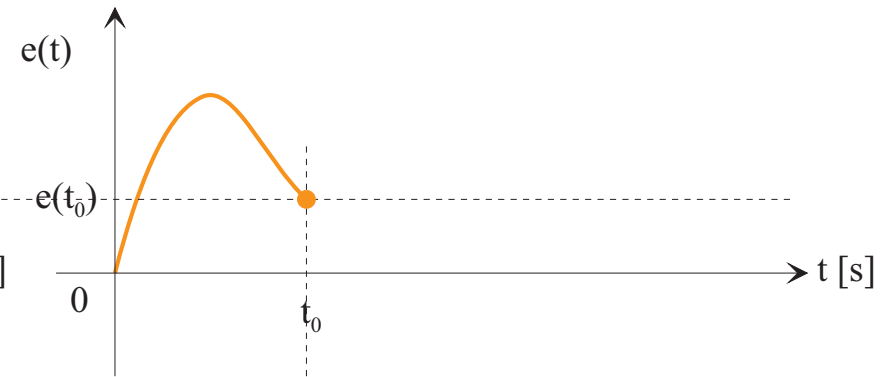
Situation 2 : l'erreur décroît en $t=t_0$

f_04_09.eps

Prise en compte de l'évolution de $e(t)$



Situation 1 : l'erreur croît en $t=t_0$



Situation 2 : l'erreur décroît en $t=t_0$

f_04_09.eps

Effet sur la commande d'un régulateur P ou PI :

$$\Delta u(t_0) = K_p \cdot e(t_0)$$

Régulateur PD



Loi de commande :

$$u(t) = K_p \cdot \left(e(t) + T_d \cdot \frac{de}{dt} \right)$$

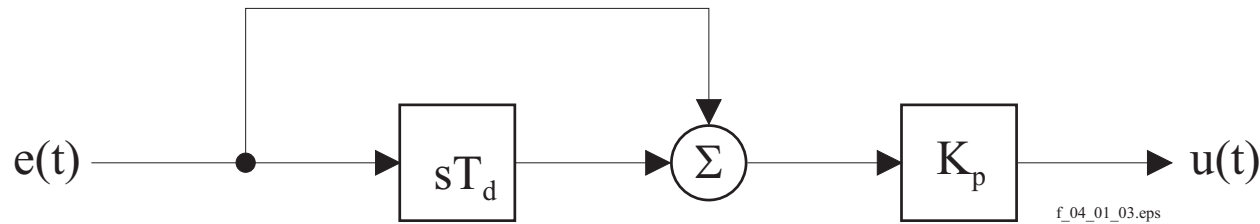
Fonction de transfert :

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot (1 + s \cdot T_d)$$

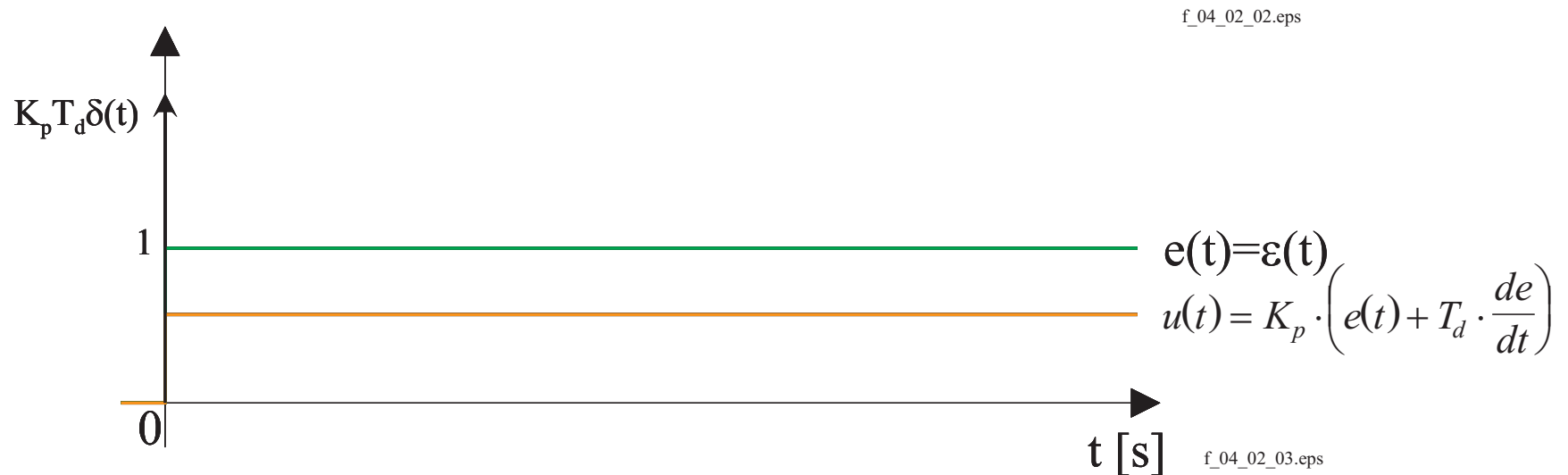
Régulateur PD



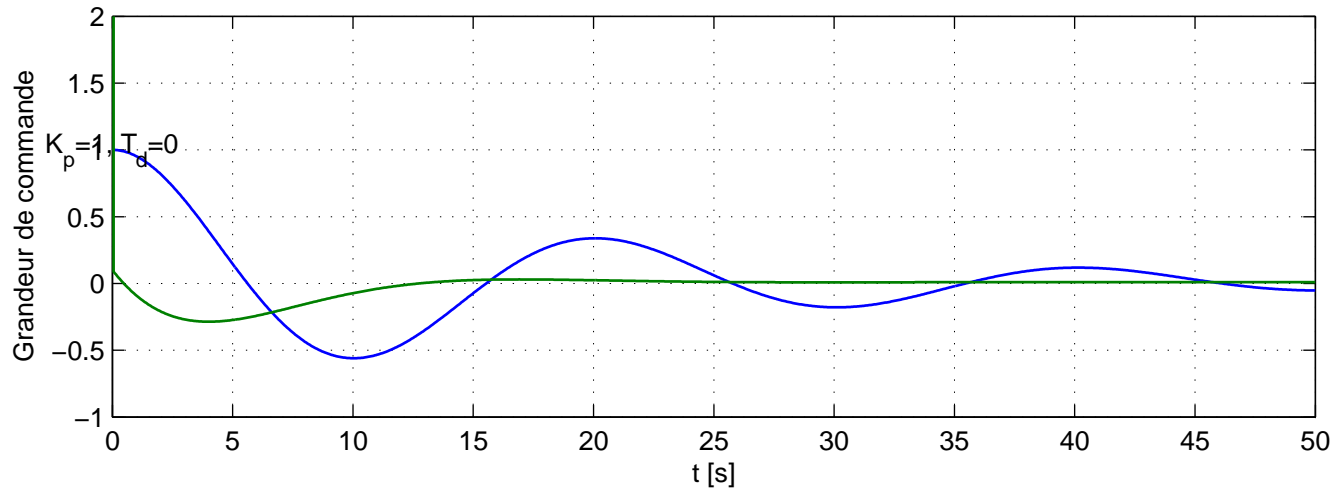
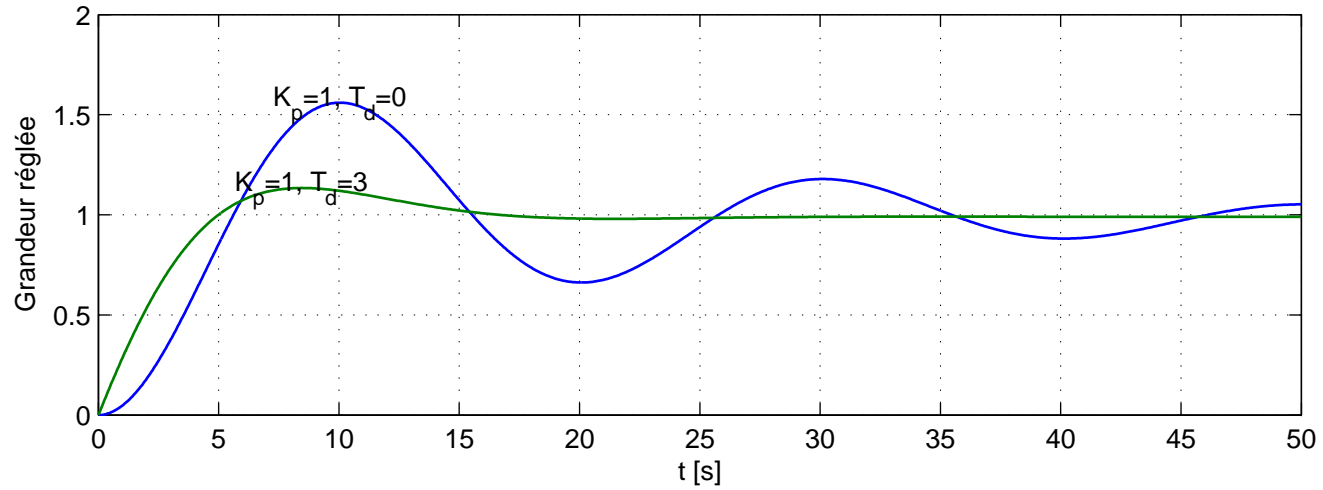
Schéma fonctionnel :



Réponse indicielle :

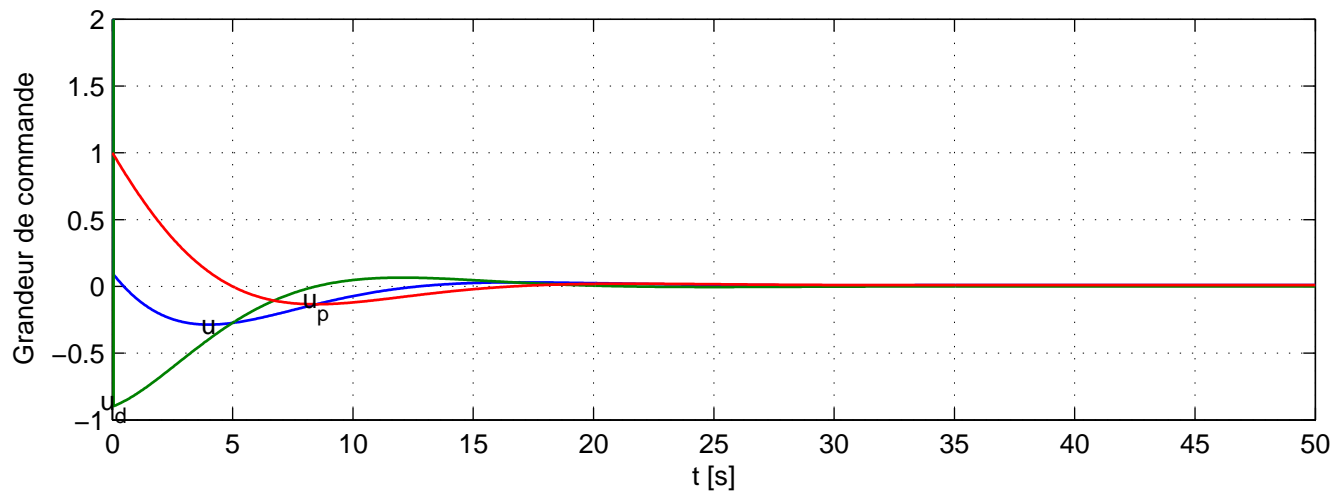
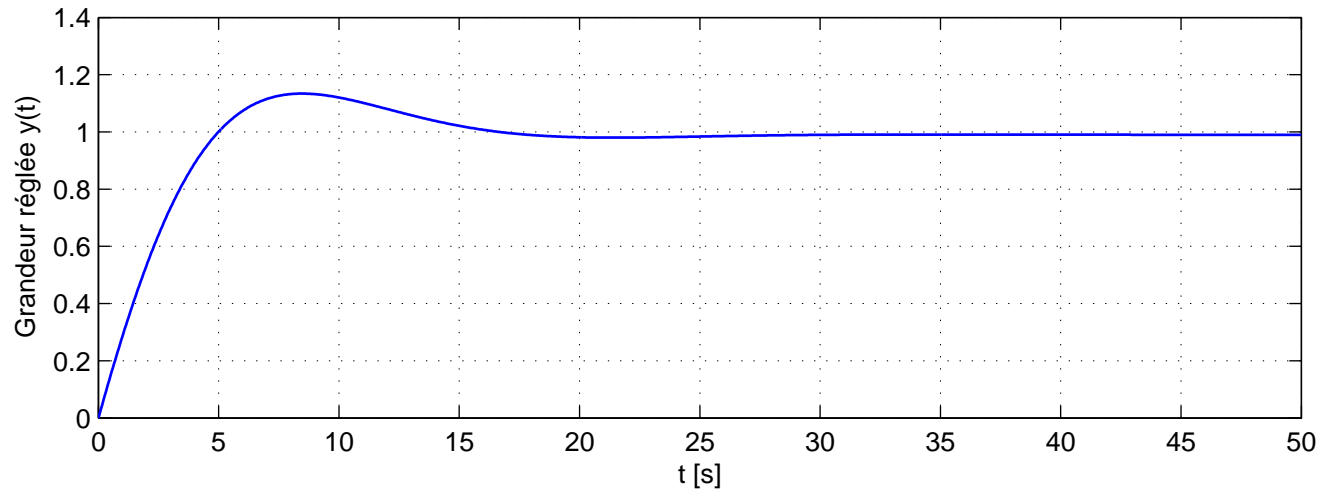


Régulateur PD

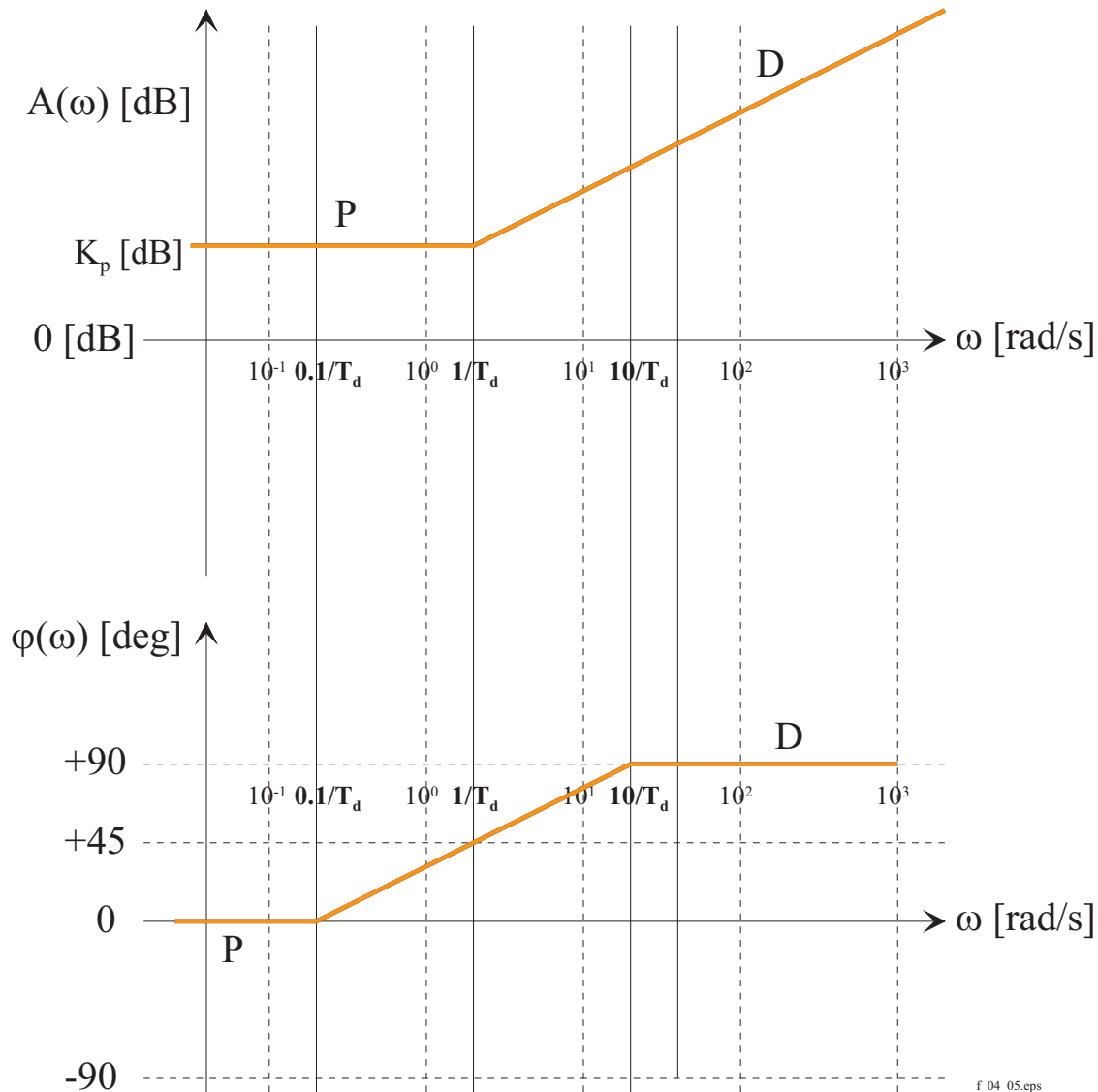


f_ch_04_03_1.eps

Régulateur PD



Réponse harmonique du régulateur PD

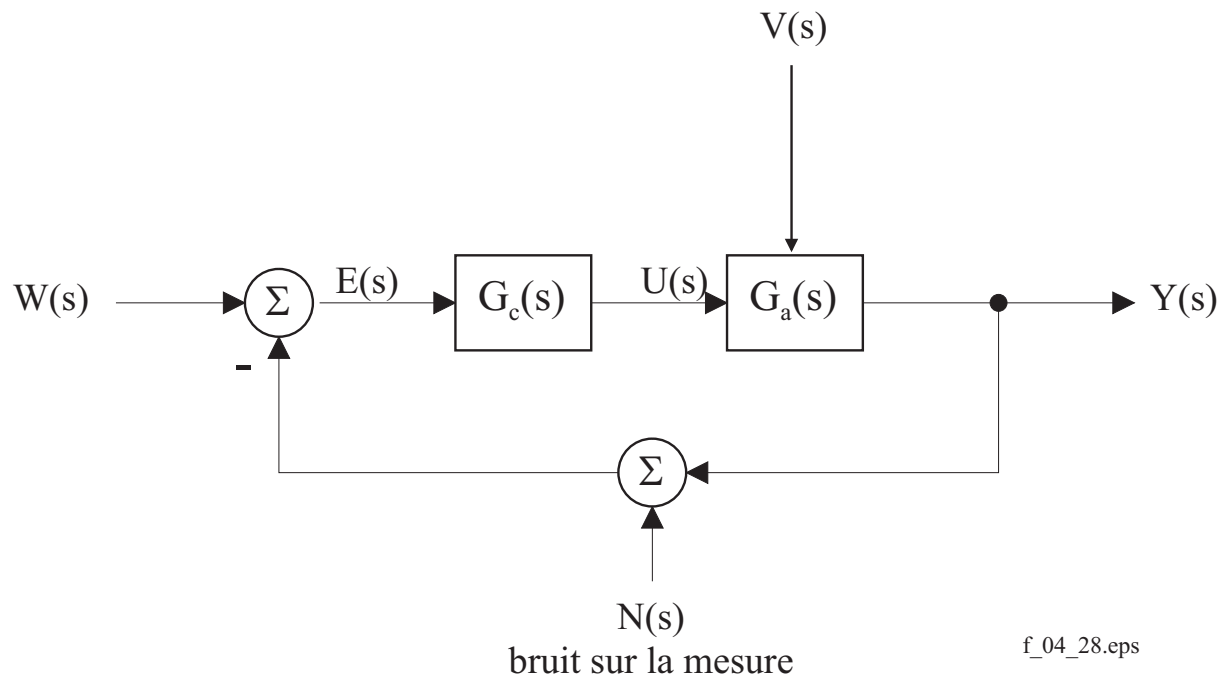


f_04_05.eps

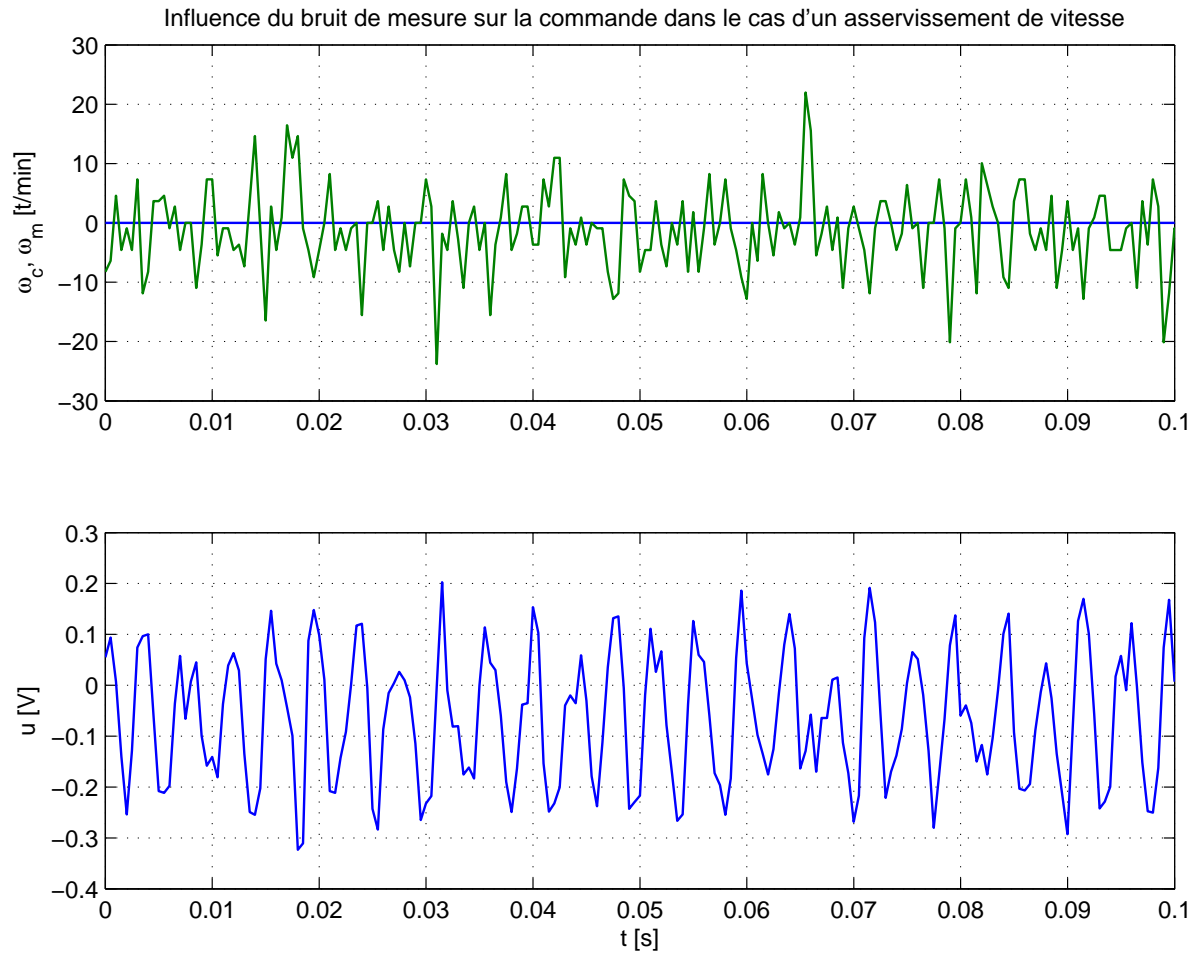
Inconvénient : sensibilité aux bruits



$$\begin{aligned}\frac{dn}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\hat{N} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) \right) \\ &= \underbrace{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \hat{N}}_{\text{amplitude multipliée par } f} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)\end{aligned}$$

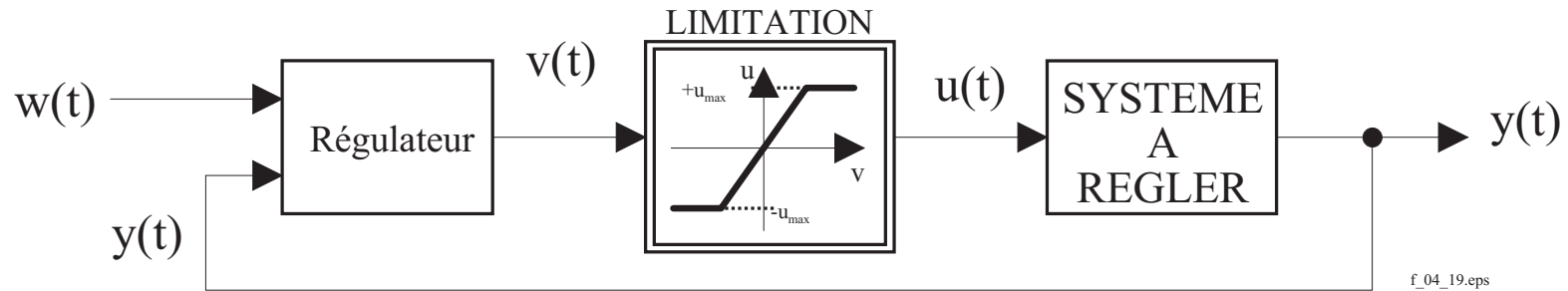


Inconvénient : sensibilité aux bruits



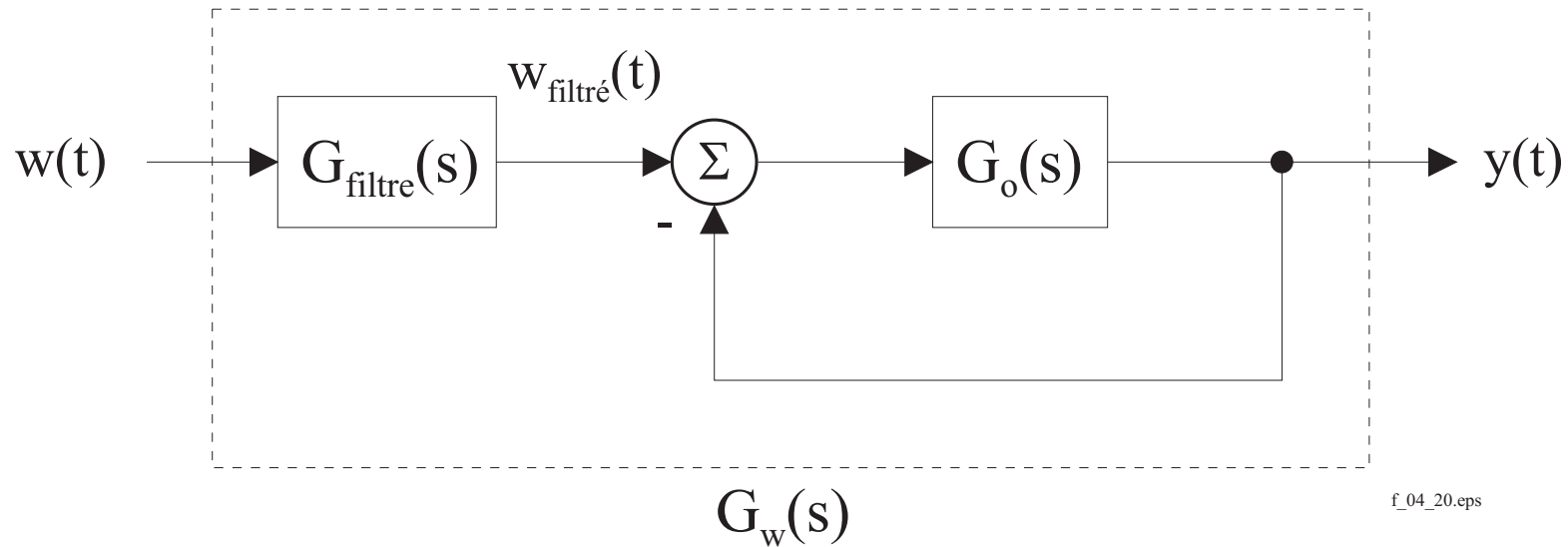
f_bruit_02_1.eps

Inconvénient : sensibilité aux bruits



i.e. aux variations rapides de l'erreur

Inconvénient : sensibilité aux bruits



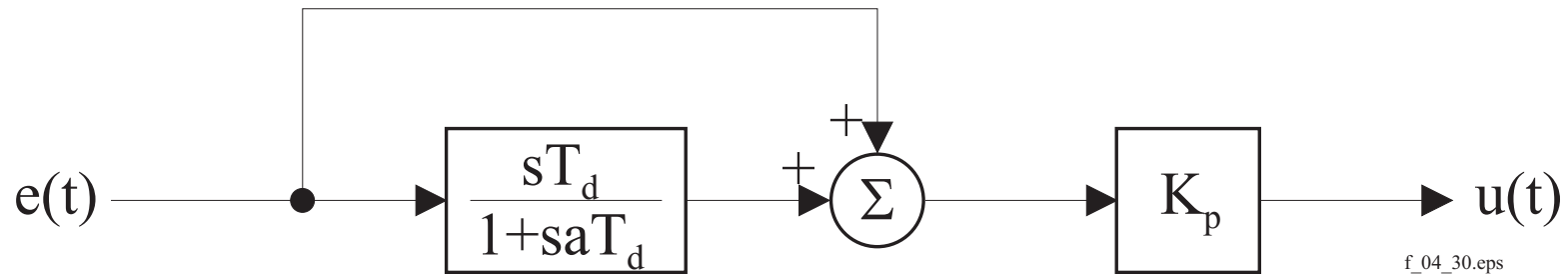
Des variations rapides de l'erreur sont provoquées par

- le bruit de mesure
- les variations rapides de la consigne

Inconvénient : sensibilité aux bruits



Solution possible : filtrer (légèrement) l'action dérivée



$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \left(1 + \frac{s \cdot T_d}{1 + s \cdot a \cdot T_d} \right) \\ &= K_p \cdot \frac{1 + s \cdot (1 + a) \cdot T_d}{1 + s \cdot a \cdot T_d} \end{aligned}$$

a = facteur d'avance de phase valant en général 0.1 à 0.2.

Régulateur industriel PID



Loi de commande :

$$u(t) = K_p \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot d\tau + T_d \cdot \frac{de}{dt} \right)$$

Régulateur industriel PID



Loi de commande :

$$u(t) = K_p \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \cdot \int_{-\infty}^t e(\tau) \cdot d\tau + T_d \cdot \frac{de}{dt} \right)$$

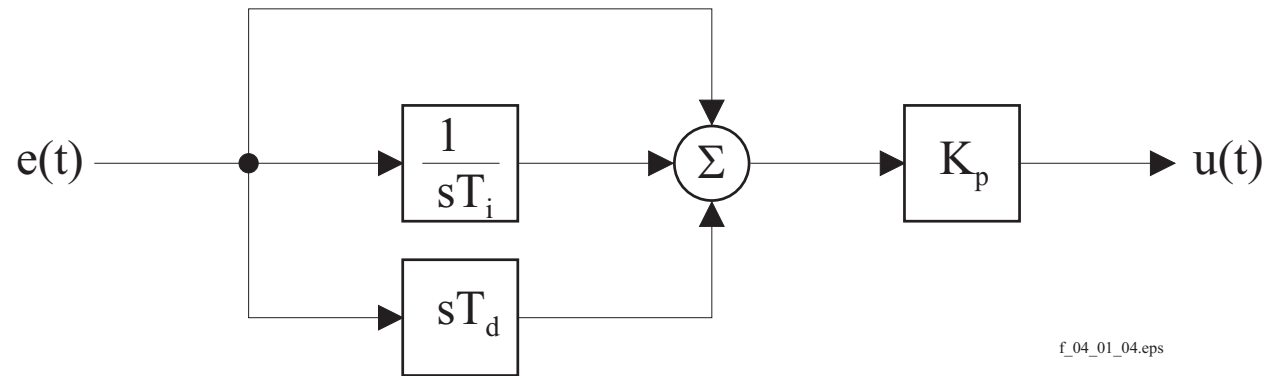
Fonction de transfert :

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \frac{1 + s \cdot T_i + s^2 \cdot T_i \cdot T_d}{s \cdot T_i}$$

Régulateur industriel PID



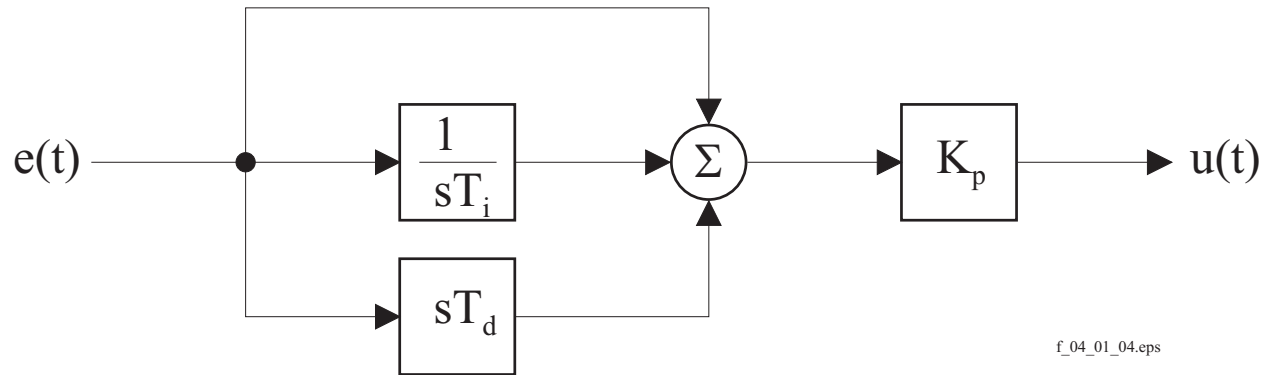
Schéma fonctionnel :



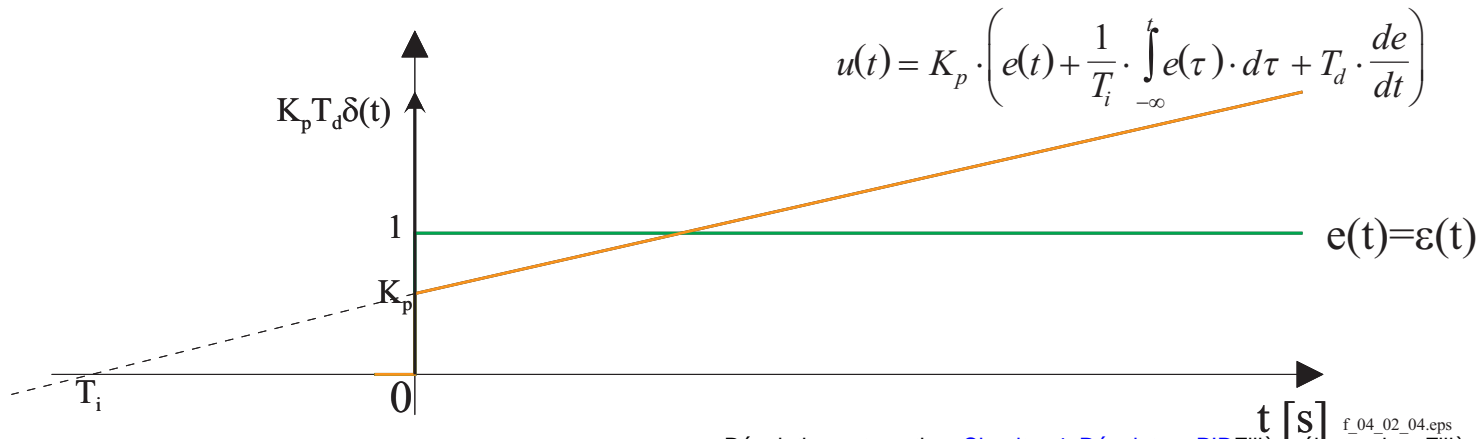
Régulateur industriel PID



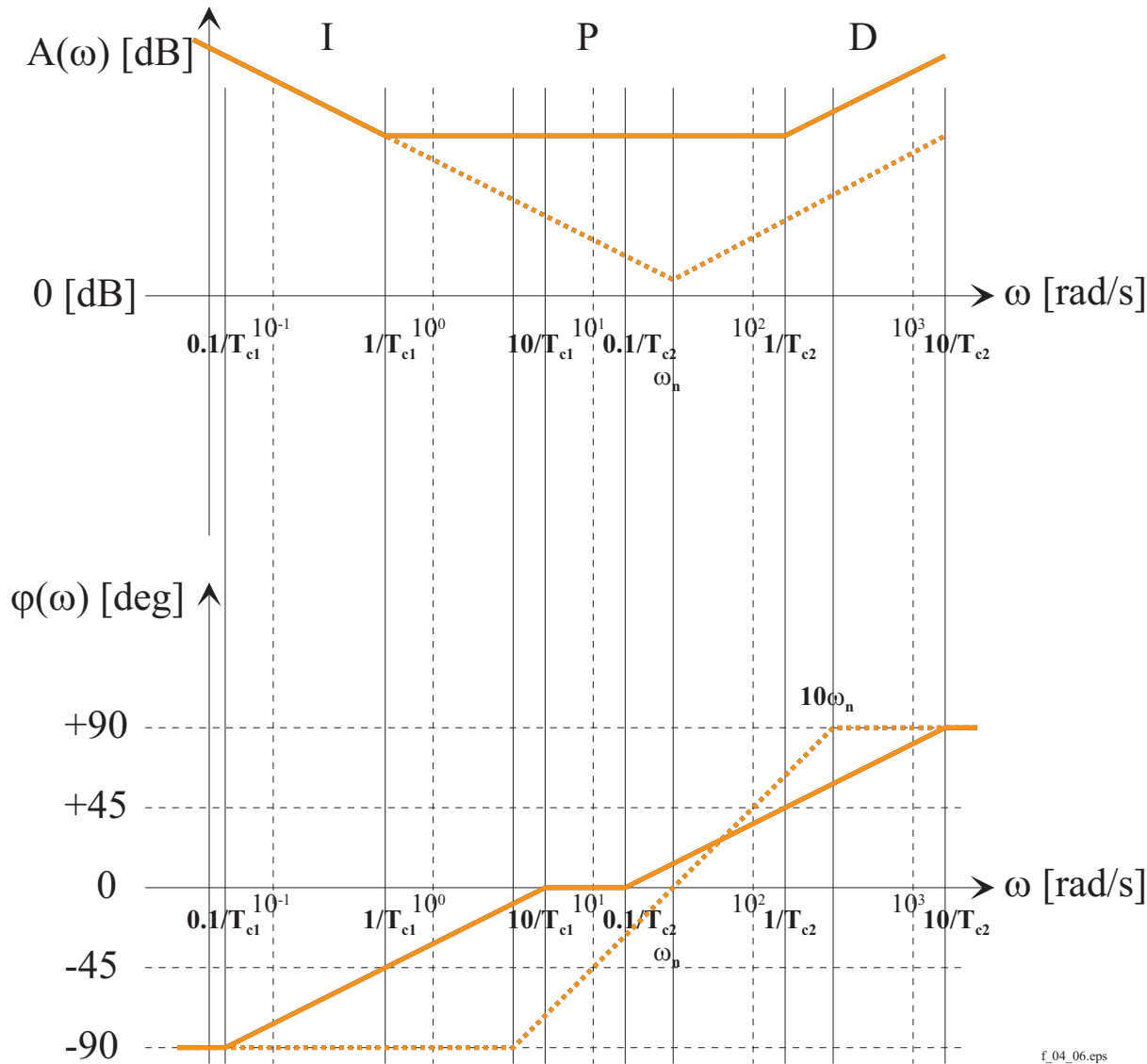
Schéma fonctionnel :



Réponse indicielle :



Réponse harmonique du régulateur PID



f_04_06.eps

Systemes physiquement realisables



$$G_c(s)|_{PID} = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot \frac{1 + s \cdot T_i + s^2 \cdot T_i \cdot T_d}{s \cdot T_i}$$

$$G_c(s)|_{PD} = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \cdot (1 + s \cdot T_d)$$

Systèmes physiquement réalisables



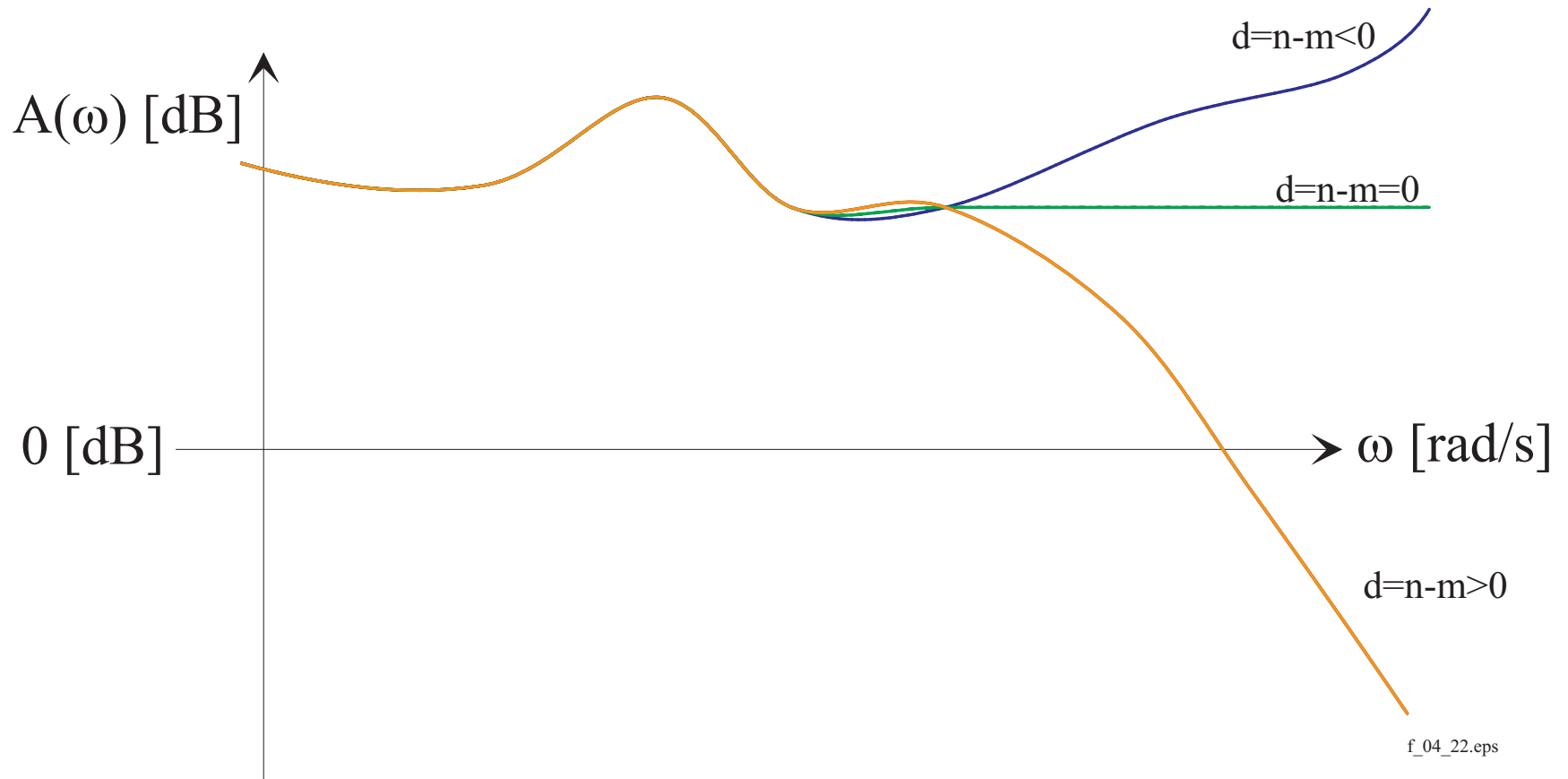
$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K}{s^\alpha} \cdot \frac{1 + s \cdot b_1 + \dots + s^{m-1} \cdot b_{m-1} + s^m \cdot b_m}{1 + s \cdot a_1 + \dots + s^{n-\alpha-1} \cdot a_{n-\alpha-1} + s^{n-\alpha} \cdot a_{n-\alpha}}$$

$$G(j \cdot \omega) = \frac{K}{(j \cdot \omega)^\alpha} \cdot \frac{1 + (j \cdot \omega) \cdot b_1 + \dots + (j \cdot \omega)^{m-1} \cdot b_{m-1} + (j \cdot \omega)^m \cdot b_m}{1 + (j \cdot \omega) \cdot a_1 + \dots + (j \cdot \omega)^{n-\alpha-1} \cdot a_{n-\alpha-1} + (j \cdot \omega)^{n-\alpha} \cdot a_{n-\alpha}}$$

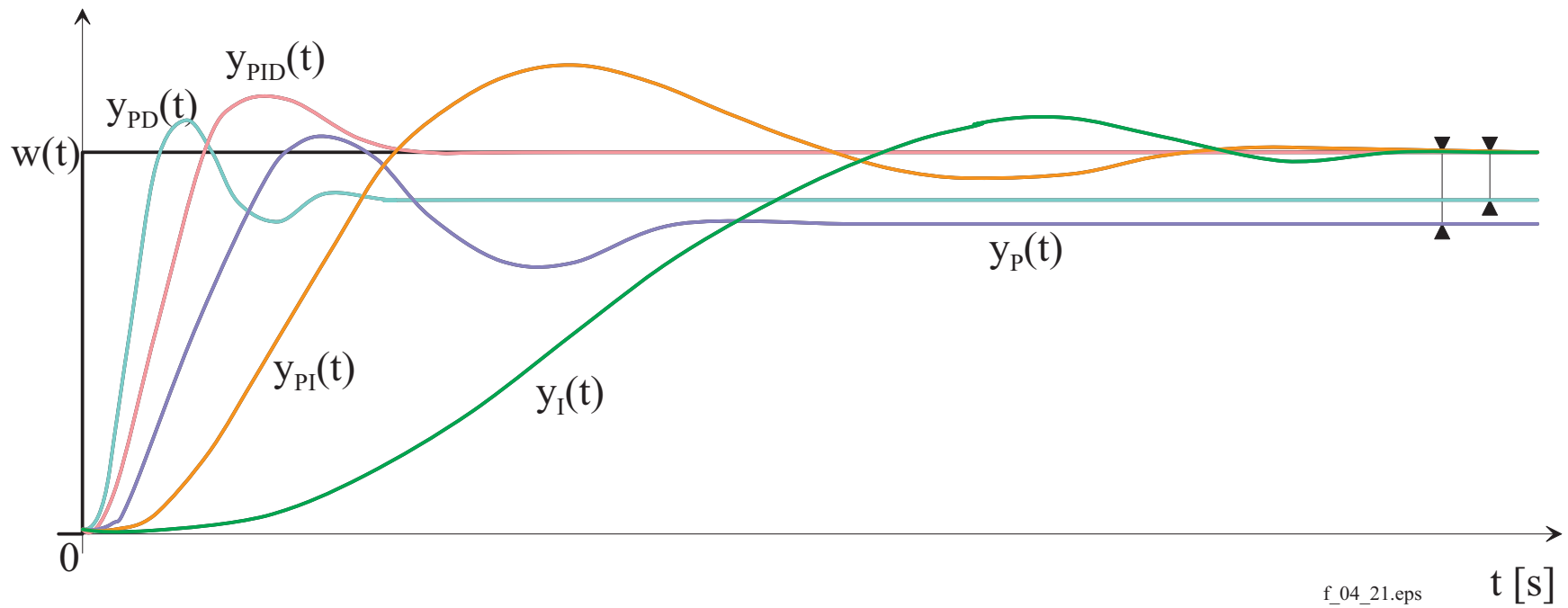
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j \cdot \omega) = \frac{K \cdot \frac{b_m}{a_{n-\alpha}}}{(j \cdot \omega)^{n-m}} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\omega) = |G(j \cdot \omega)| \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{K \cdot \frac{b_m}{a_{n-\alpha}}}{\omega^{n-m}} \\ \varphi(\omega) = \arg \{G(j \cdot \omega)\} \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow (n - m) \cdot (-90 [^\circ]) \end{array} \right.$$

Systemes physiquement realisables



"Hit parade" des régulateurs classiques



Résumé des effets respectifs des actions P, I, et D

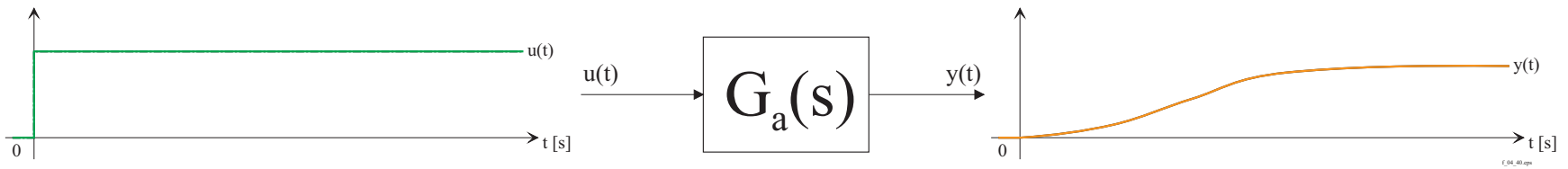


Action	Avantage	Désavantage
P	dynamique	ne permet pas d'annuler une erreur statique
I	annulation d'erreur statique, amélioration de la robustesse	action lente, ralentit le système (effet déstabilisant)
D	action très dynamique, améliore la rapidité (effet stabilisant)	sensibilité aux bruits forte sollicitation de l'organe de commande

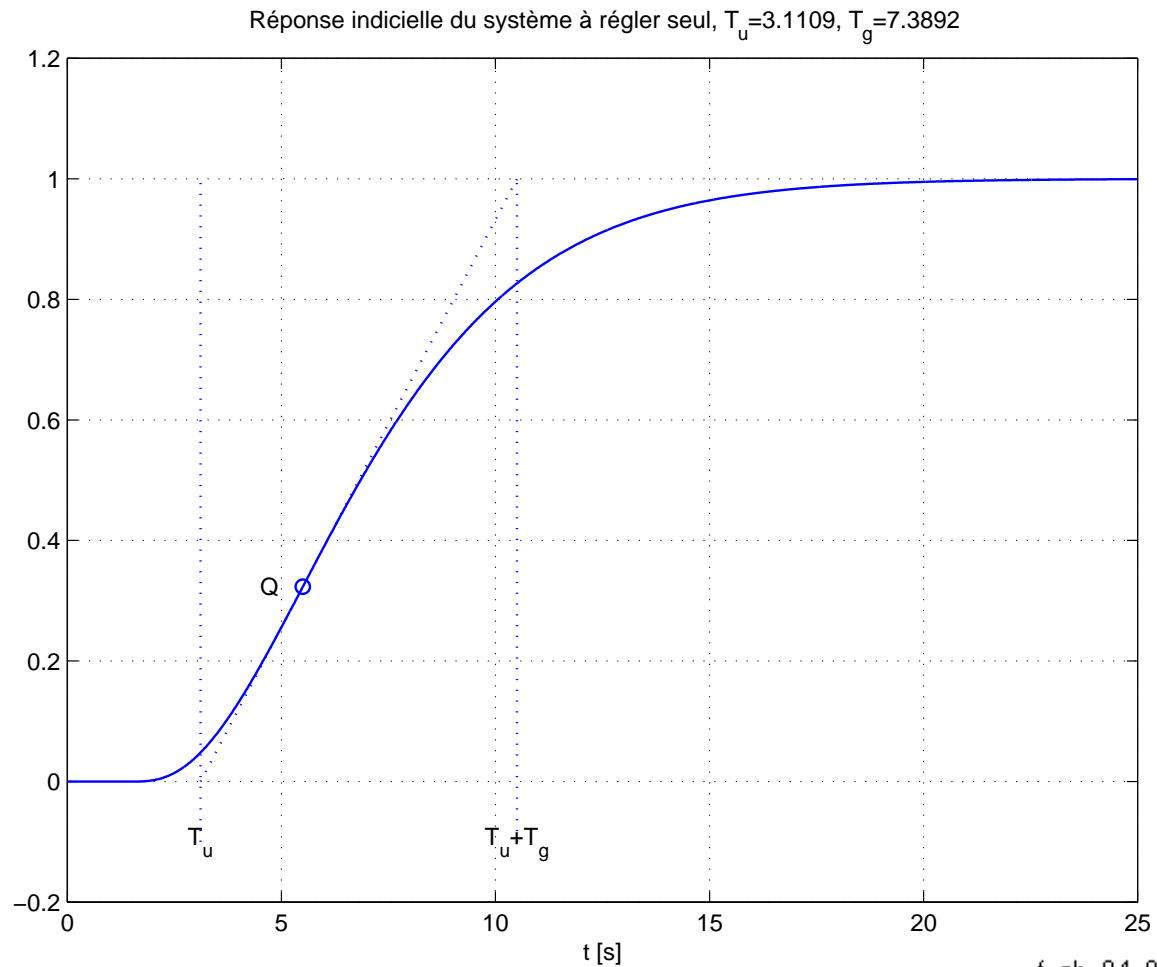


Ajustage des paramètres de régulateurs P, PI et PID par la méthode de Ziegler-Nichols

1^{ère} méthode de Ziegler Nichols



1^{ère} méthode de Ziegler Nichols

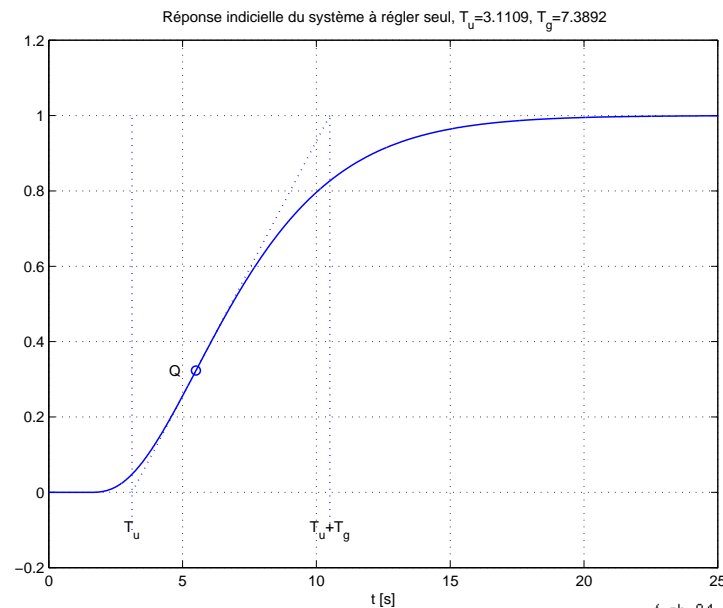


f_ch_04_04_1c.eps

1^{ère} méthode de Ziegler Nichols

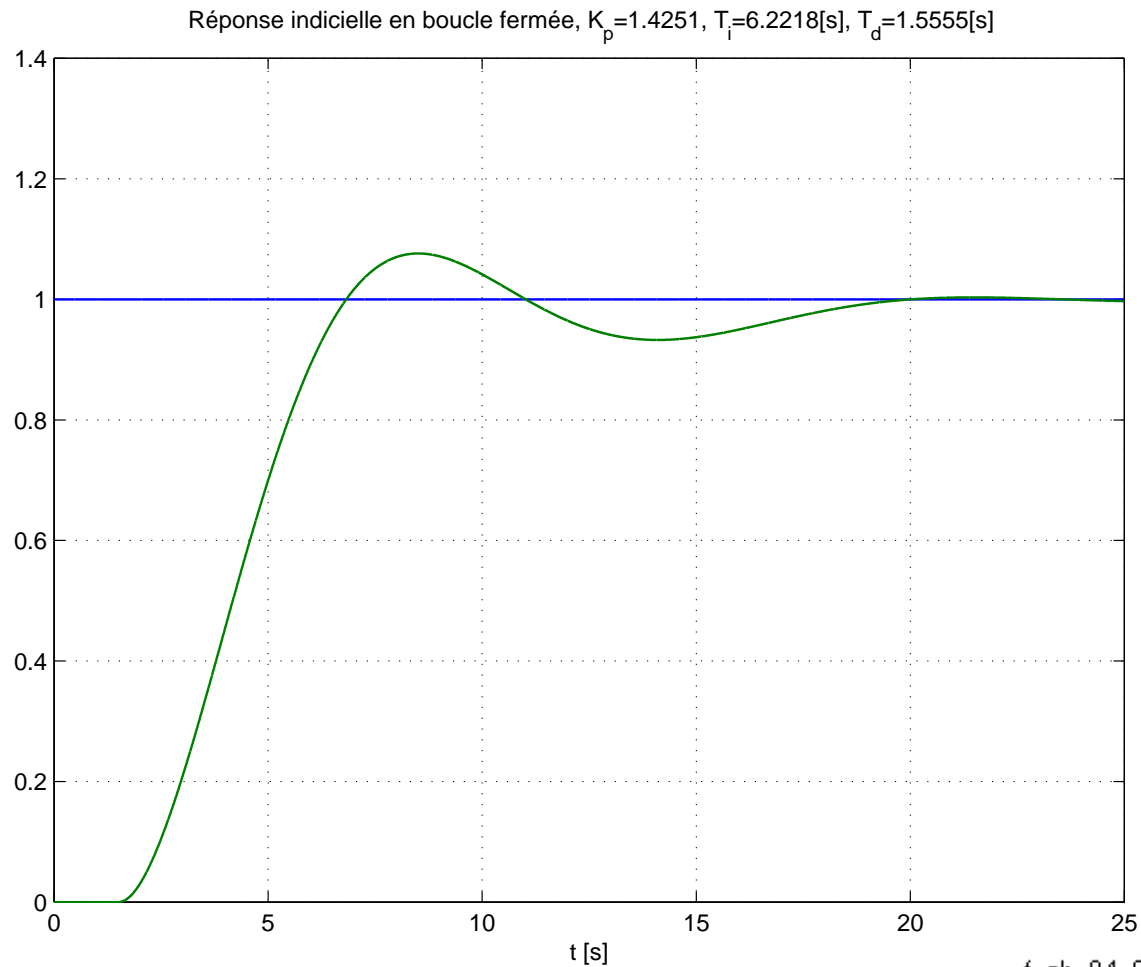


Type	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T_g}{T_u}$	-	-
PI	$0.9 \cdot \frac{T_g}{T_u}$	$3.3 \cdot T_u$	-
PID	$1.2 \cdot \frac{T_g}{T_u}$	$2.0 \cdot T_u$	$0.5 \cdot T_u$



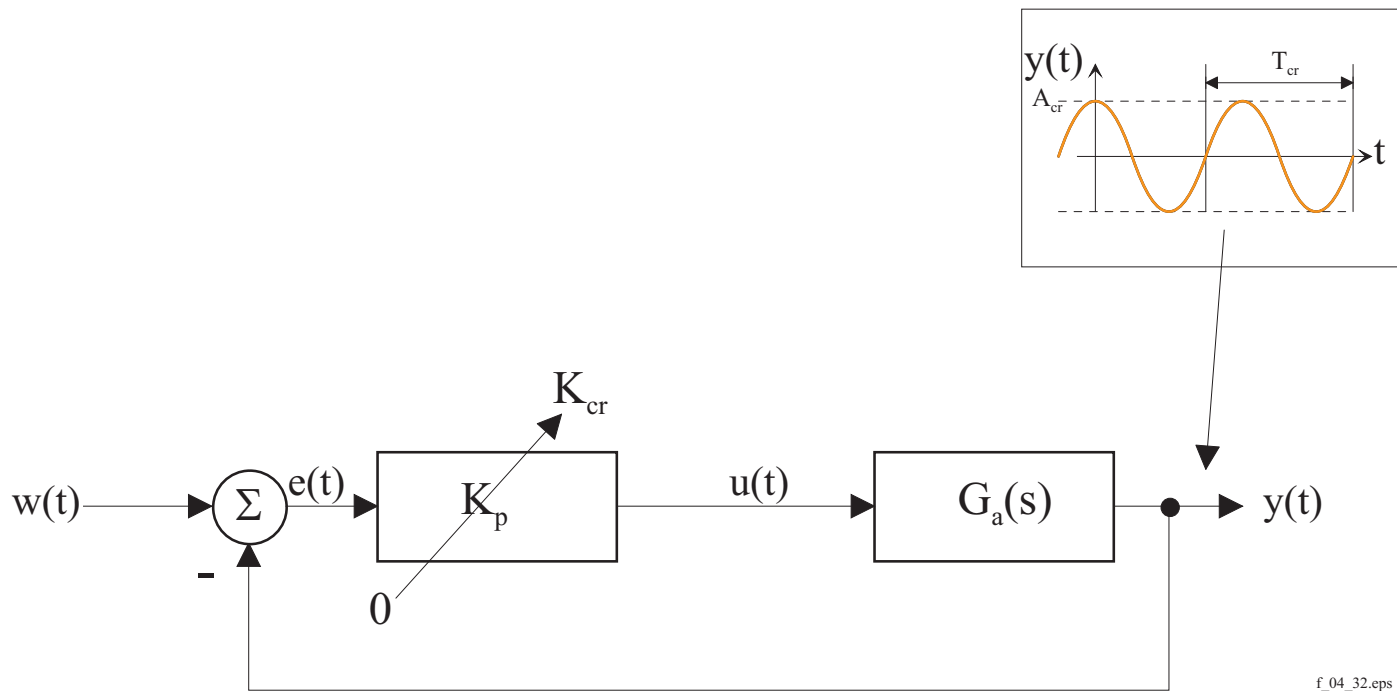
f_ch_04_04_1c.eps

1^{ère} méthode de Ziegler Nichols



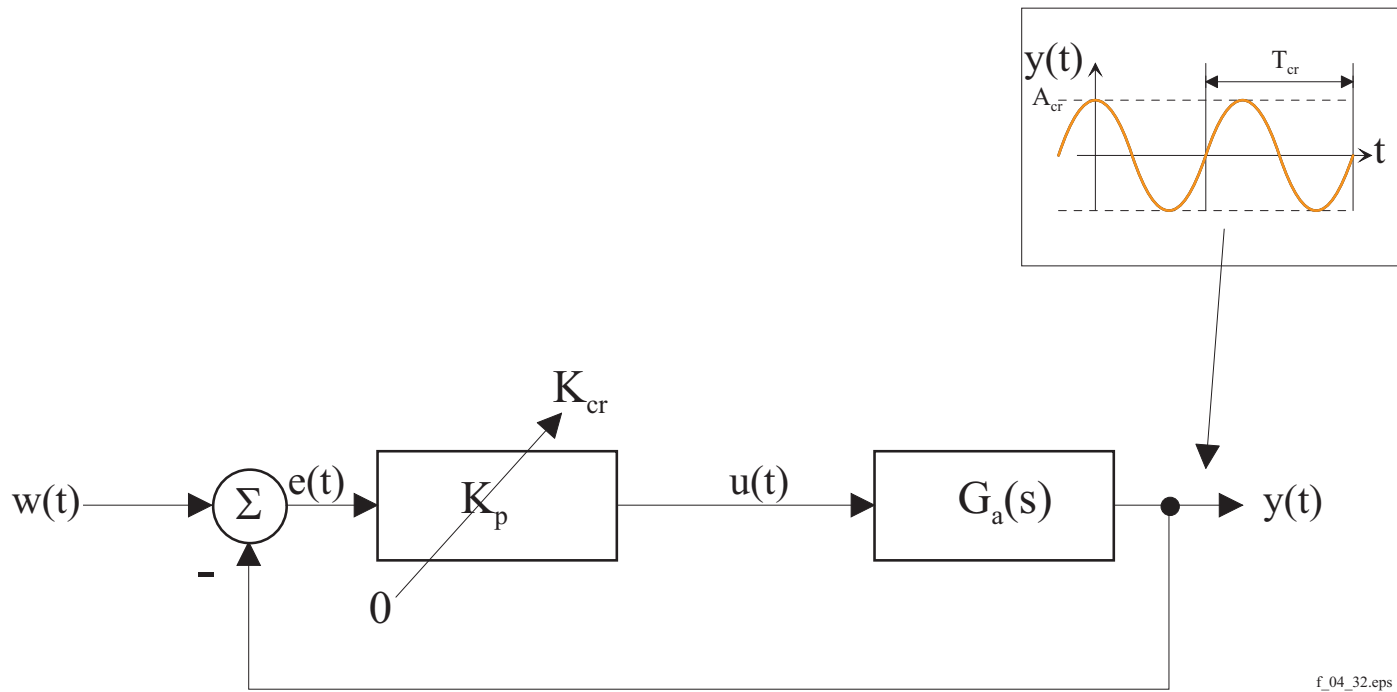
f_ch_04_04_2c.eps

2^{ème} méthode de Ziegler Nichols



- Contre-réactionner le système à régler avec un régulateur P de gain K_p
- Augmenter K_p jusqu'à ce que le système soit en oscillation entretenue

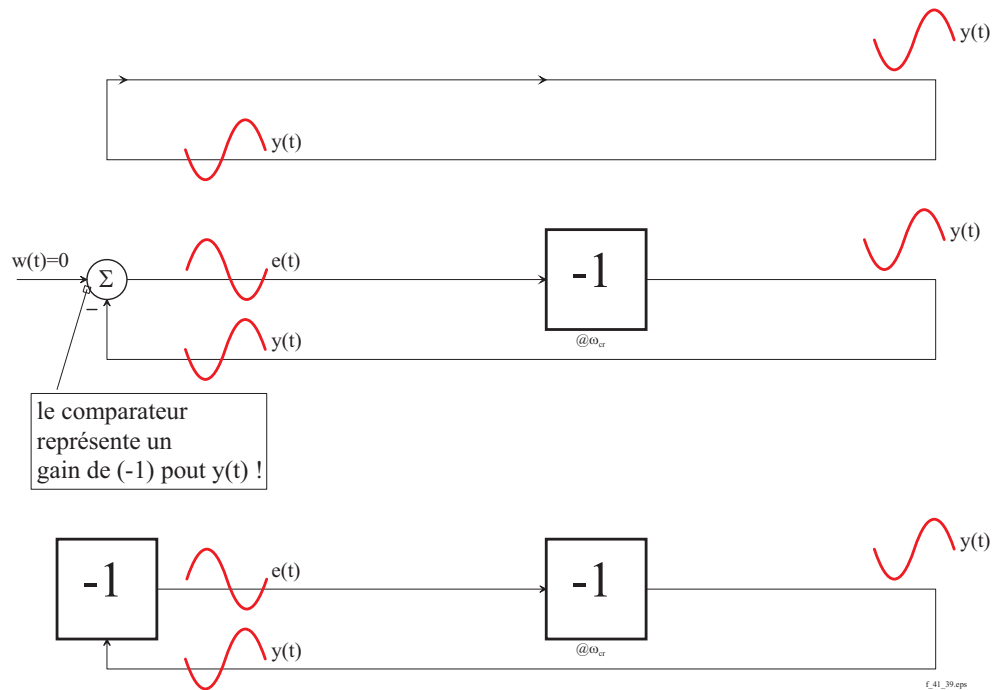
2^{ème} méthode de Ziegler Nichols



- Pulsation d'oscillation
- Amplitude de l'oscillation

$$\omega_{cr} = 2 \cdot \pi \cdot f_{cr} = \frac{2 \cdot \pi}{T_{cr}}$$
$$A_{cr}$$

2^{ème} méthode de Ziegler Nichols



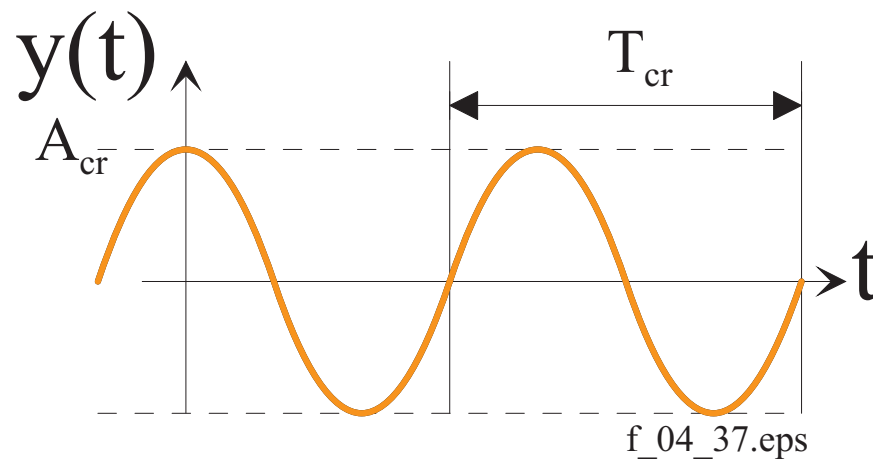
Dans ces conditions, le gain de boucle en ω_{cr} est égal à

-1

2^{ème} méthode de Ziegler Nichols



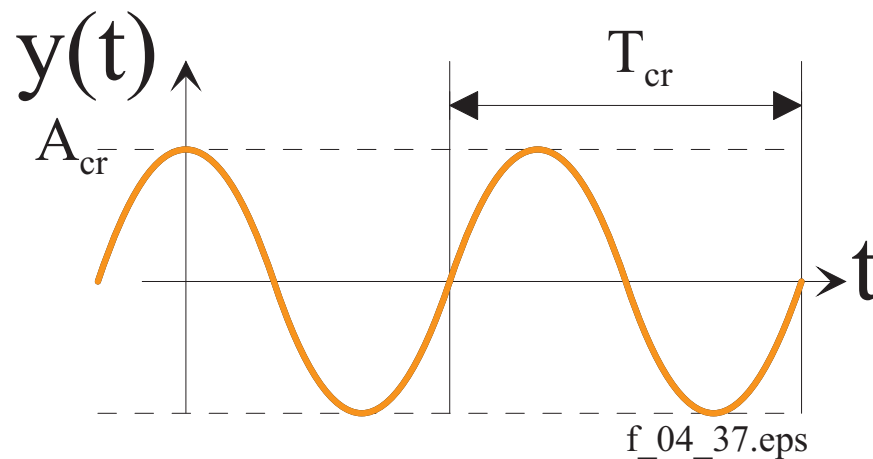
Type	K_p	T_i	T_d
P	$0.5 \cdot K_{cr}$	-	-
PI	$0.45 \cdot K_{cr}$	$0.83 \cdot T_{cr}$	-
PID	$0.6 \cdot K_{cr}$	$0.5 \cdot T_{cr}$	$0.125 \cdot T_{cr}$



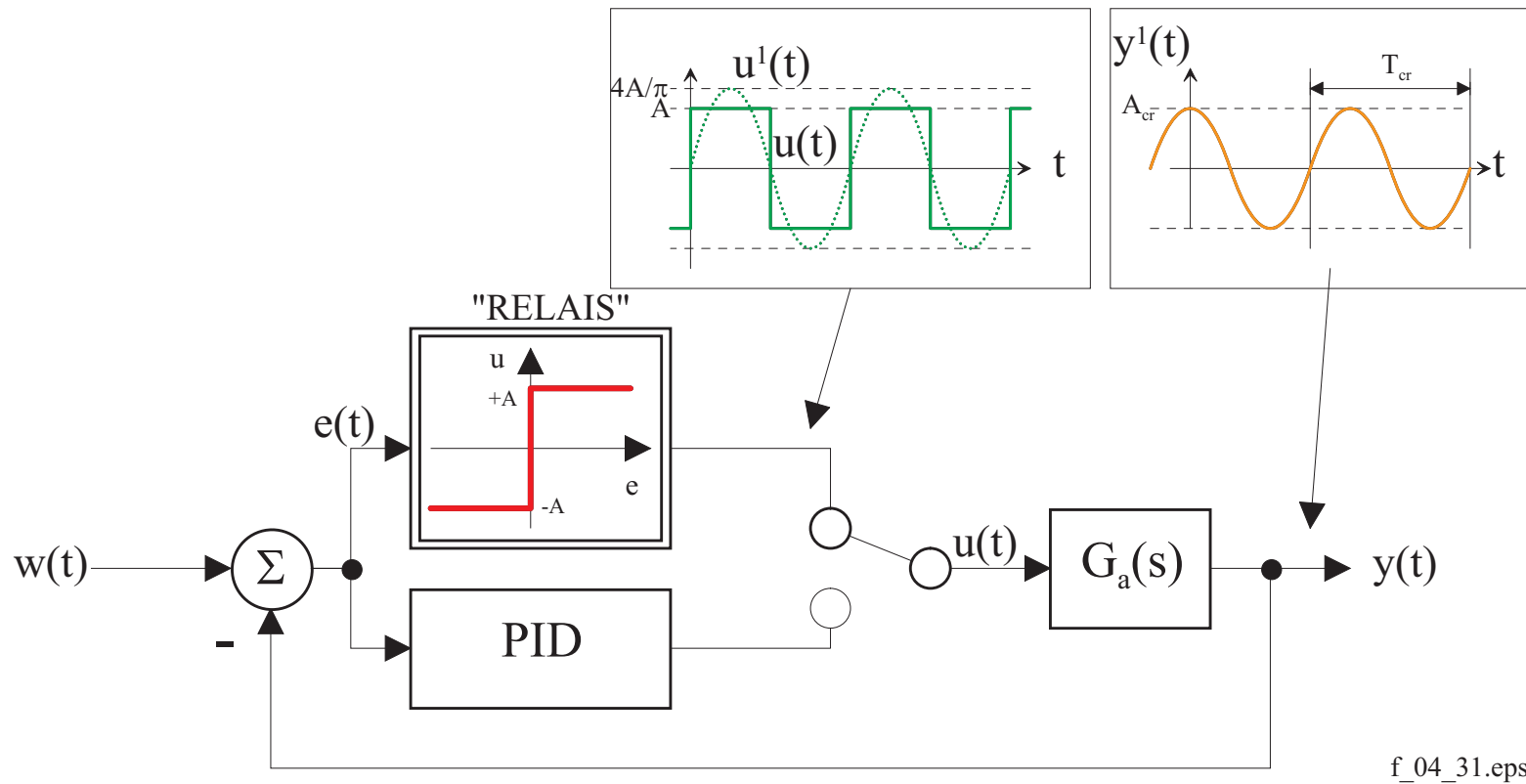
2^{ème} méthode de Ziegler Nichols



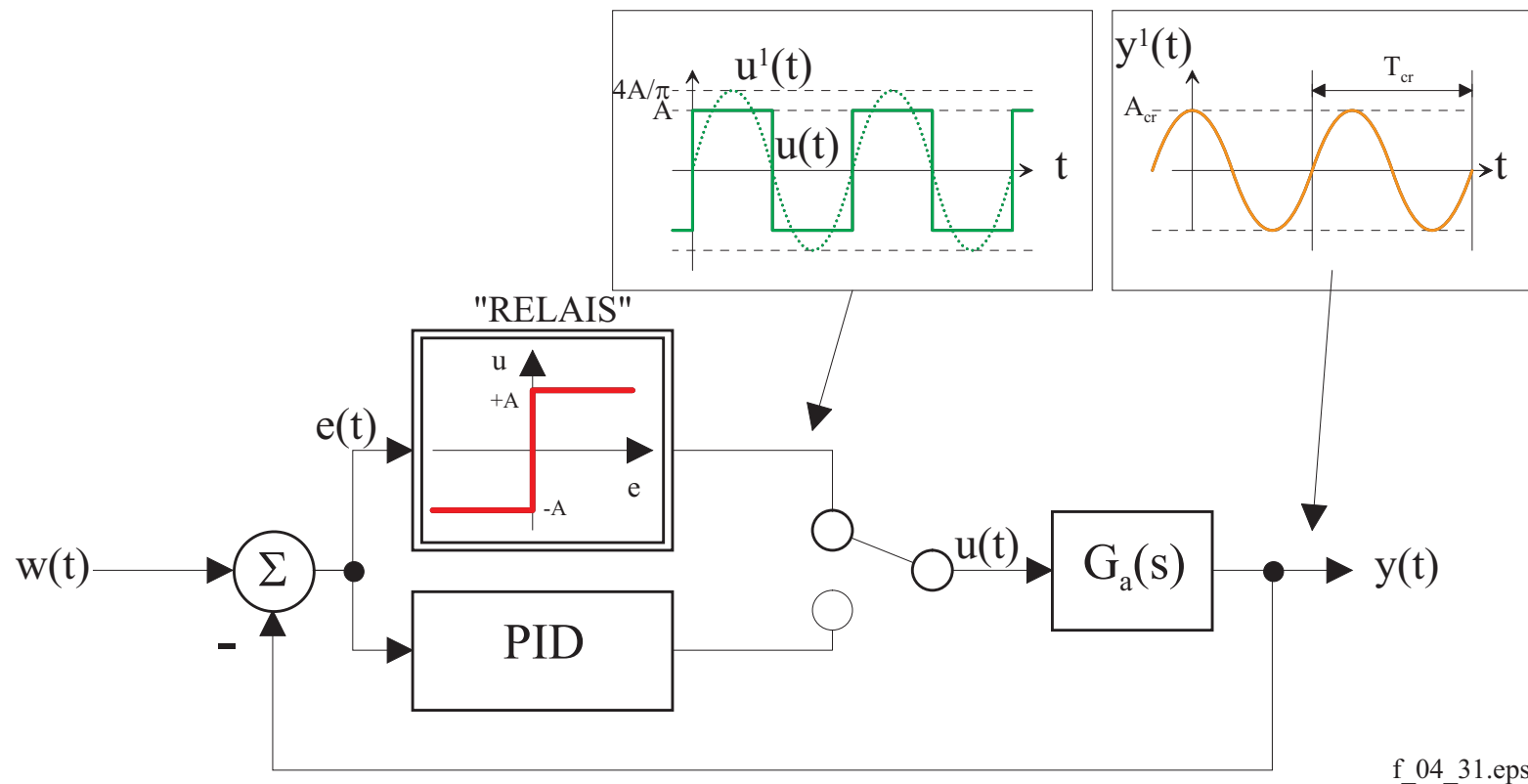
Type	K_p	T_i	T_d
P	$0.4 \cdot K_{cr}$	-	-
PI	$0.4 \cdot K_{cr}$	$0.4 \cdot T_{cr}$	-
PID	$0.4 \cdot K_{cr}$	$0.4 \cdot T_{cr}$	$0.1 \cdot T_{cr}$



2^{ème} méthode de Ziegler Nichols modifiée

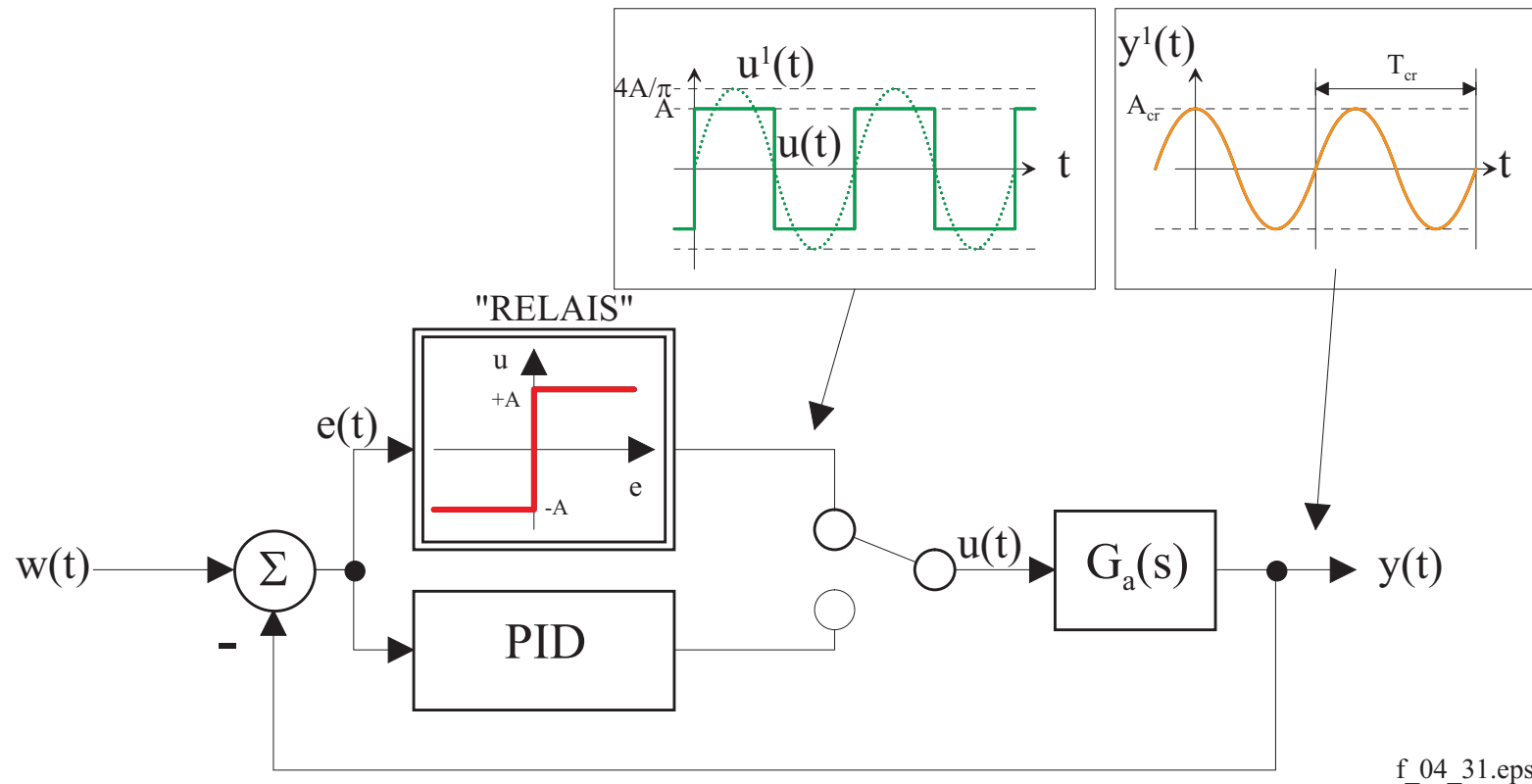


2^{ème} méthode de Ziegler Nichols modifiée



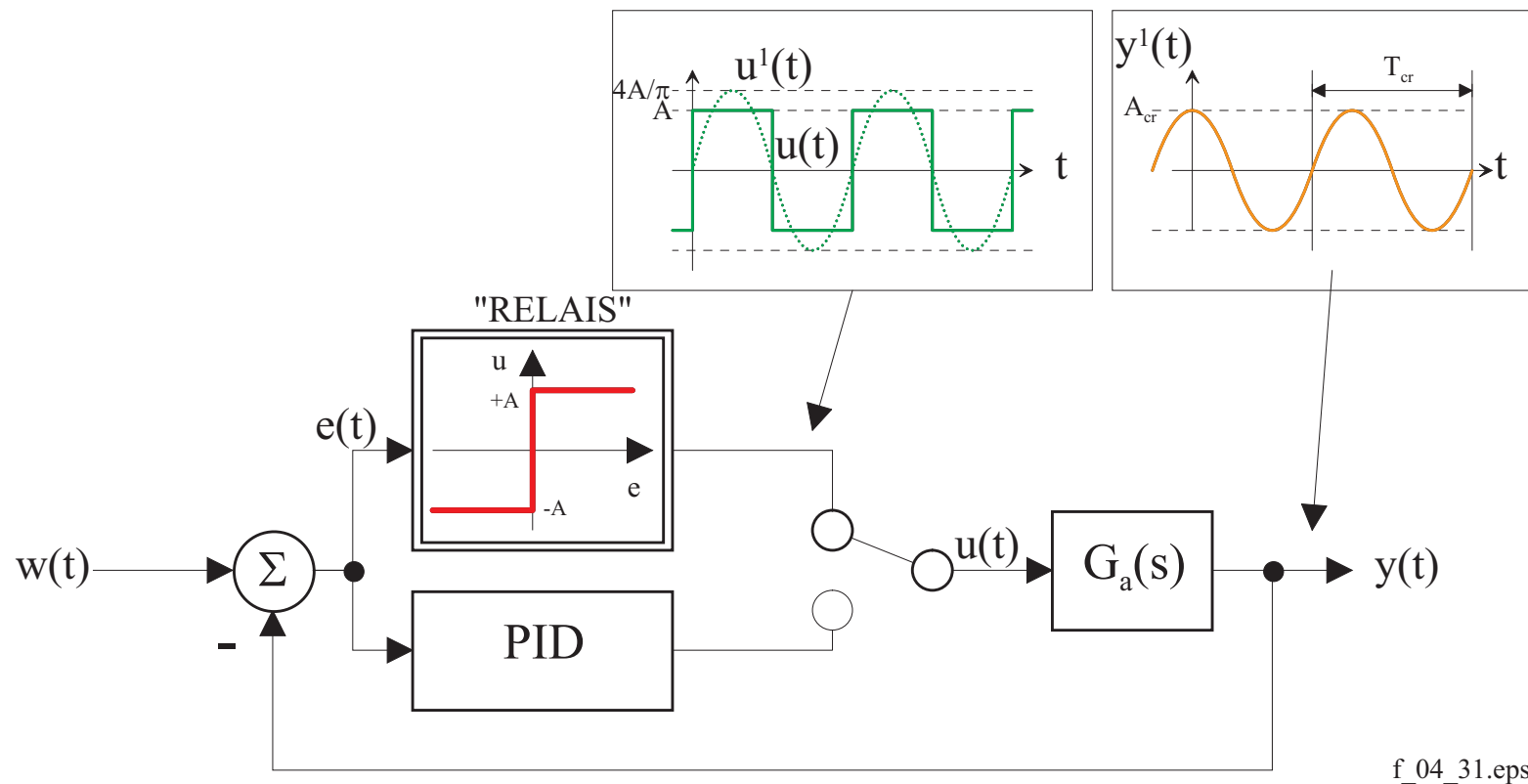
- Le système à régler est de type passe-bas
- \longrightarrow les hautes fréquences du signal d'entrée sont \pm fortement atténuées

2^{ème} méthode de Ziegler Nichols modifiée



- On néglige les harmoniques de $y(t)$
- $\longrightarrow y(t) \approx Y^1 \cdot \sin(\omega_{cr} \cdot t)$ est purement sinusoïdale (seul le fondamental est pris en compte)

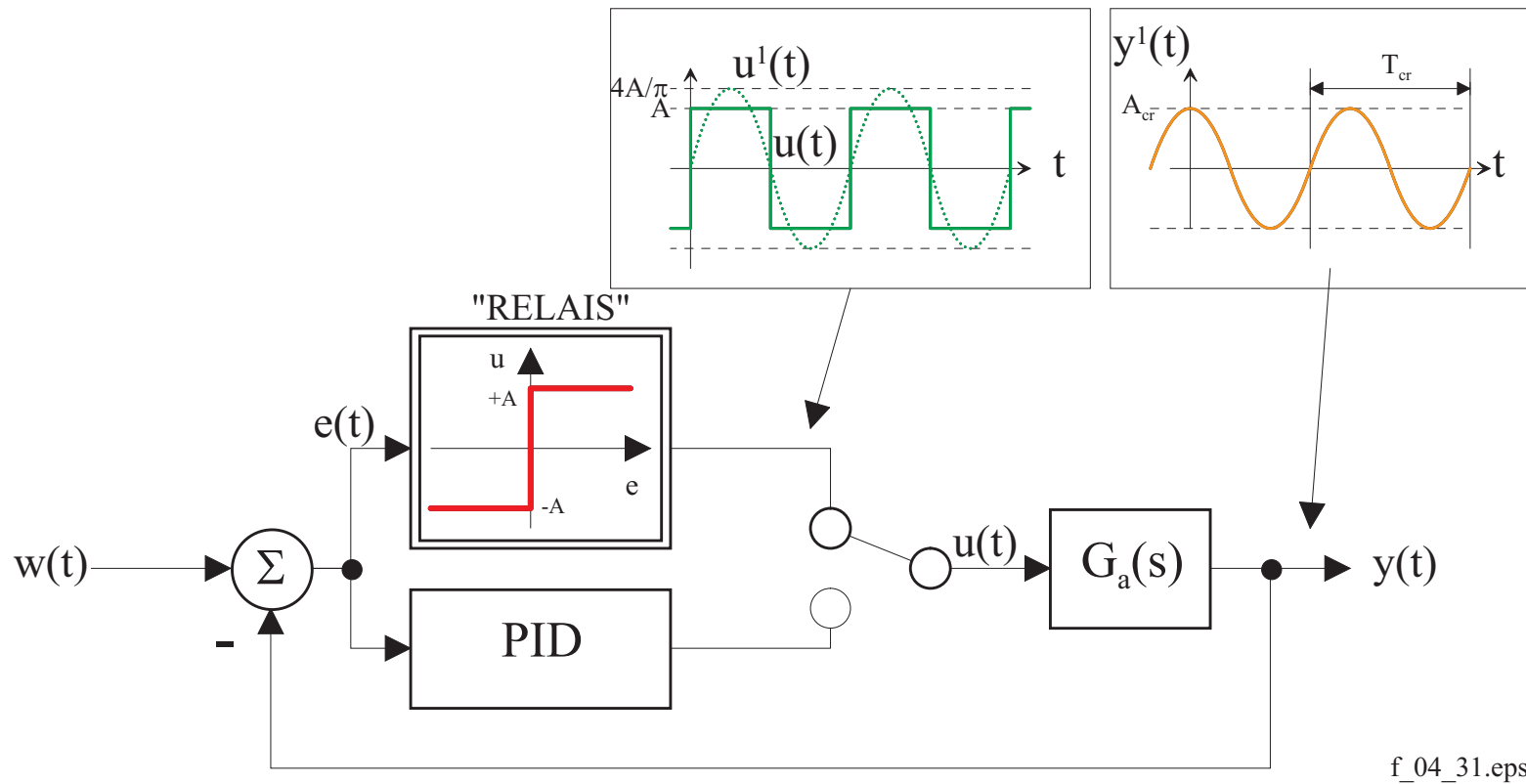
2^{ème} méthode de Ziegler Nichols modifiée



- $y(t) \approx Y^1 \cdot \sin(\omega_{cr} \cdot t)$ ne dépend alors que du fondamental de $u(t)$:

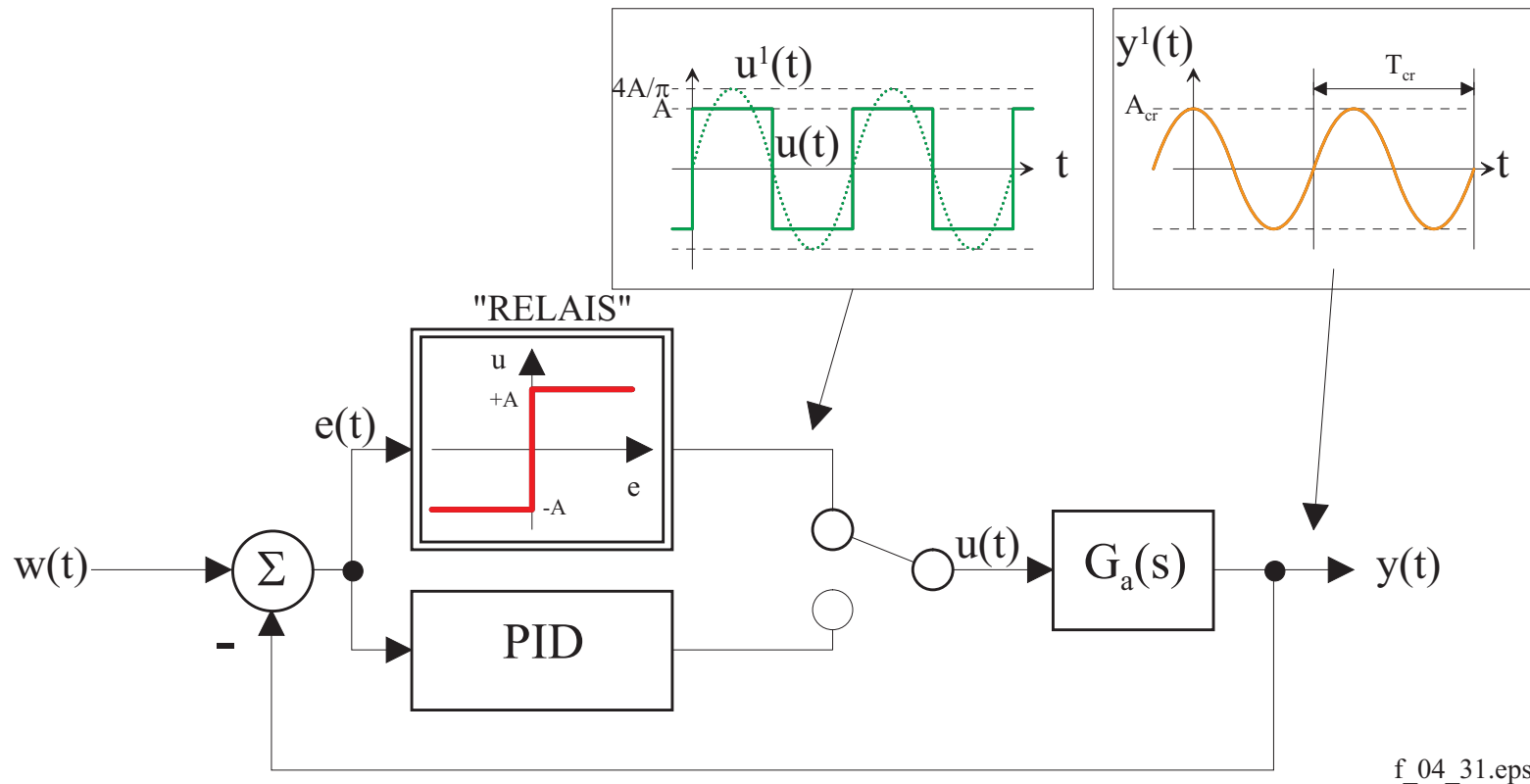
$$u(t) \approx U^1 \cdot \sin(\omega_{cr} \cdot t)$$

2^{ème} méthode de Ziegler Nichols modifiée



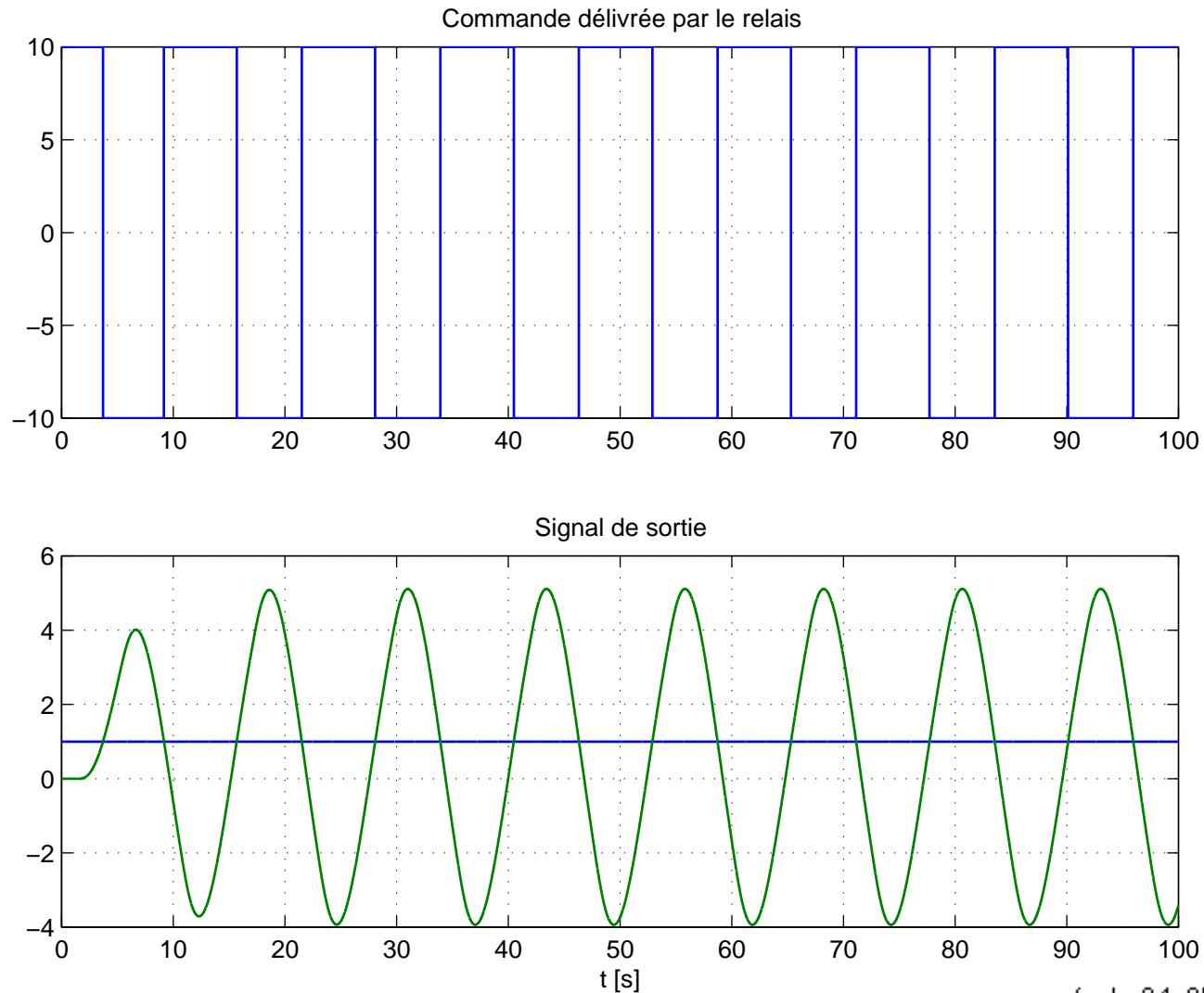
● Le gain de boucle en ω_{cr} est donc $K_{p_{cr}} \cdot \frac{Y^1}{U^1} = 1$

2^{ème} méthode de Ziegler Nichols modifiée

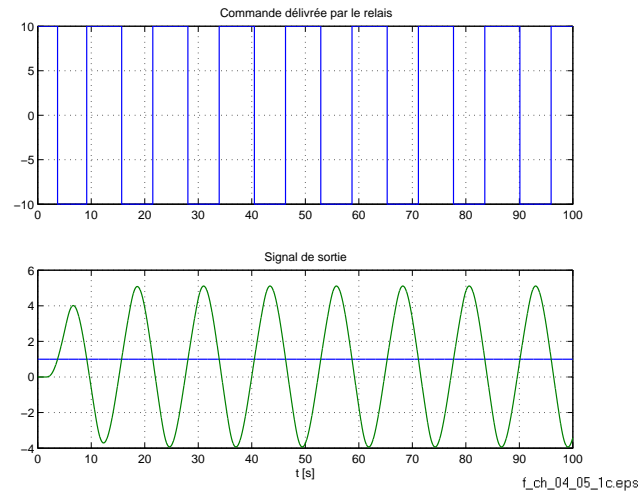


- Le gain de boucle en ω_{cr} est donc $K_{pcr} \cdot \frac{Y^1}{U^1} = 1$
- D'où :
$$K_{pcr} = \frac{1}{\frac{Y^1}{U^1}} = \frac{U^1}{Y^1} = \frac{\frac{4}{\pi} \cdot A}{A_{cr}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{A}{A_{cr}}$$

2^{ème} méthode de Ziegler Nichols modifiée



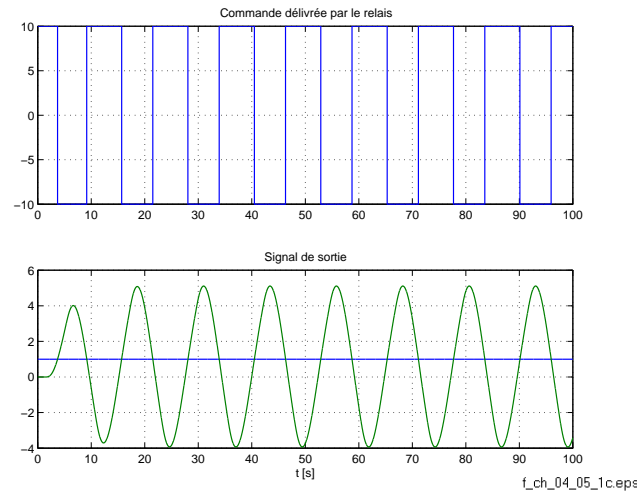
2^{ème} méthode de Ziegler Nichols modifiée



$$K_{cr} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{A}{A_{cr}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{10}{5} = 2.55$$

$$T_{cr} = 12.6 \text{ [s]}$$

2^{ème} méthode de Ziegler Nichols modifiée



$$K_{cr} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{A}{A_{cr}} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{10}{5} = 2.55$$

$$T_{cr} = 12.6 \text{ [s]}$$

$$K_p = 0.4 \cdot K_{cr} = 1.1 [-]$$

$$T_i = 0.4 \cdot T_{cr} = 5.0 \text{ [s]}$$

$$T_d = 0.1 \cdot T_{cr} = 1.26 \text{ [s]}$$

2^{ème} méthode de Ziegler Nichols modifiée



Réponse indicielle en boucle fermée, $K_p=1.1$, $T_i=5[s]$, $T_d=1.26[s]$

